Les quadrilateres

Il existe beaucoup de quadrilatères (convexes) , dont vous connaissez déjà la plupart :
carré, rectangle, parallélogramme, losange (Raute), trapèze et cerf-volant (Drachen), figure que vous connaissez essentiellement de par son utilisation ludique.

Toutes ces figures possèdent quatre côtés, quatre sommets et quatre angles intérieurs et se notent mathématiquement de la manière suivante : $(ABCD)$, avec le premier sommet A, suivi du sommet B, ensuite C, ensuite D pour revenir finalement vers A. L'ordre joue ainsi un rôle au sein de cette notation, mais on pourrait tout aussi bien commercer par la lettre C, par exemple $(ABCD)=(CDAB)$.

Il est facile de s'entraîner à ce type de construction en utilisant le programme gratuit, mais très performant, Geogebra.

Définitions

- On appelle **quadrilatère**, tout polygone ayant quatre côtés.

  Rappelons que les quadrilatères qui nous intéressent au point de vue mathématiques sont des quadrilatères convexes.

- On appelle **côté d'un polygone** (quadrilatère), le segment qui relie deux points consécutifs d'un polygone (quadrilatère).

- On appelle **diagonale** d'un quadrilatère, le segment qui relie un point au point opposé. *ou bien*
- On appelle **diagonale** d'un quadrilatère, le segment qui relie deux points non consécutifs d'un quadrilatère.

Parmi tous les quadrilatères, nous nous intéresserons essentiellement aux seuls quadrilatères convexes. Pour établir des formules d'aires, les quadrilatères devront en plus avoir au moins deux côtés parallèles, c.-à-d. être (au moins) un trapèze.

Voici un petit résumé de ce chapitre

A Classification des quadrilatères suivant les propriétés
- Des côtés et
- Des diagonales

B Aires et périmètres de figures polygonales
- Périmètre d'une figure
- Aire des quadrilatères
- Aire d'un triangle
- Aires de figures polygonales composées de quadrilatères et triangles

Remarque technique : *Si en général, le côté est considéré comme un segment (essentiellement dans le contexte de longueur ou milieu), il peut également être considéré comme droite, dans le contexte des angles (extérieurs), par exemple.*

A Classification des quadrilatères suivant les propriétés

Définition 1

Un quadrilatère est appelé un **quadrilatère convexe** ssi tous ses angles intérieurs sont des angles saillants ($0° < \alpha < 180°$)

A1 Classifications suivant les propriétés des côtés

Pour comprendre ces classifications suivant les côtés, il faut savoir qu'il existe différentes caractéristiques pour les **côtés des quadrilatères** :

1) Le quadrilatère a **deux côtés parallèles** (trapèze) appelées **bases**.
2) Le quadrilatère possède des **côtés parallèles deux à deux** (parallélogramme)
3) Le quadrilatère possède quatre **côtés de même longueur** (losange)
4) **Les côtés** du quadrilatère **forment un angle droit** (rectangle)

Les quadrilatères évoqués sont des représentants types, mais il existe également des combinaisons des différentes propriétés des quadrilatères. Ainsi **le carré est la figure parfaite** qui possède toutes ces propriétés.

Définition 2

On appelle **trapèze**, tout quadrilatère qui a deux côtés parallèles, appelés bases du trapèze.

Parmi les trapèzes, nous distinguons entre les trapèzes quelconques, les trapèzes rectangles (où deux côtés consécutifs sont perpendiculaires) et les trapèzes isocèles (où les deux côtés obliques (non parallèles) ont même longueur.

Définition 3

On appelle **parallélogramme**, tout quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux.

En mathématiques et dans les sciences, c'est le parallélogramme qui joue un rôle très important (parallélogramme des forces en physique).

Définition 4

On appelle **losange**, tout parallélogramme dont les quatre côtés ont même longueur.

Définition 5

On appelle **rectangle**, tout parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont perpendiculaires.

Définition 6

On appelle **carré**, tout parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont même longueur et sont perpendiculaires.

Remarque : *Le carré est en fait le quadrilatère parfait, qui possède toutes les propriétés.*

A2 Classifications suivant les propriétés des diagonales

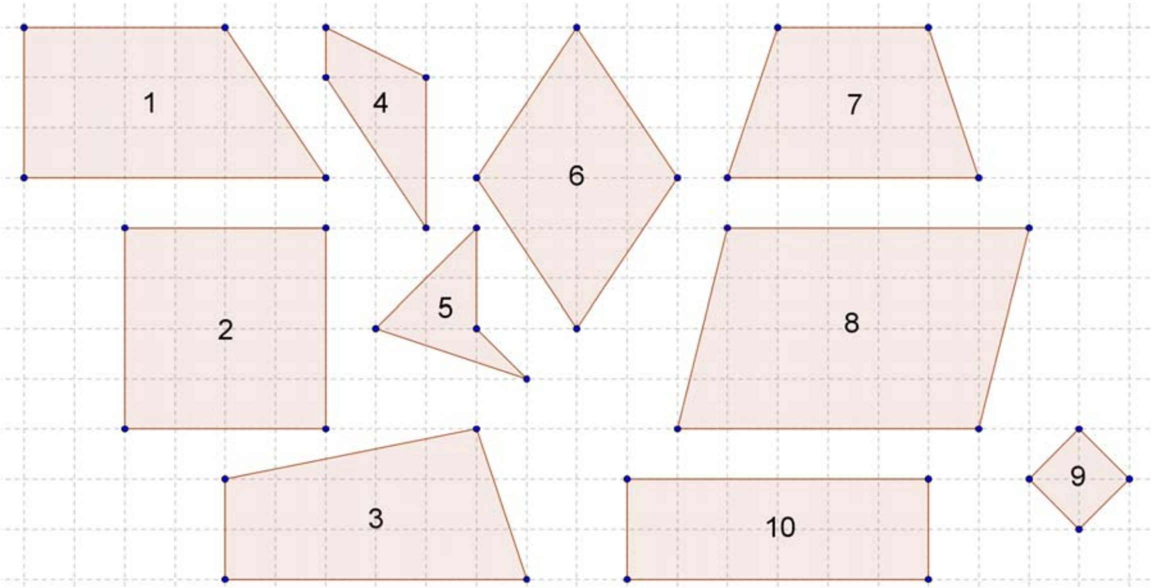
Pour comprendre ces classifications suivant les diagonales, il faut savoir qu'il existe différentes caractéristiques pour les **diagonales des quadrilatères** :

1) **Les diagonales** du quadrilatère **se coupent en leur milieu** (parallélogramme)
2) **Les diagonales** du quadrilatère **ont la même longueur** (rectangle)
3) **Les diagonales** du quadrilatère **forment un angle droit** (losange)

Comme remarqué auparavant, il existe des figures possédant plusieurs de ces propriétés et **le carré est la figure parfaite** qui possède toutes ces propriétés.

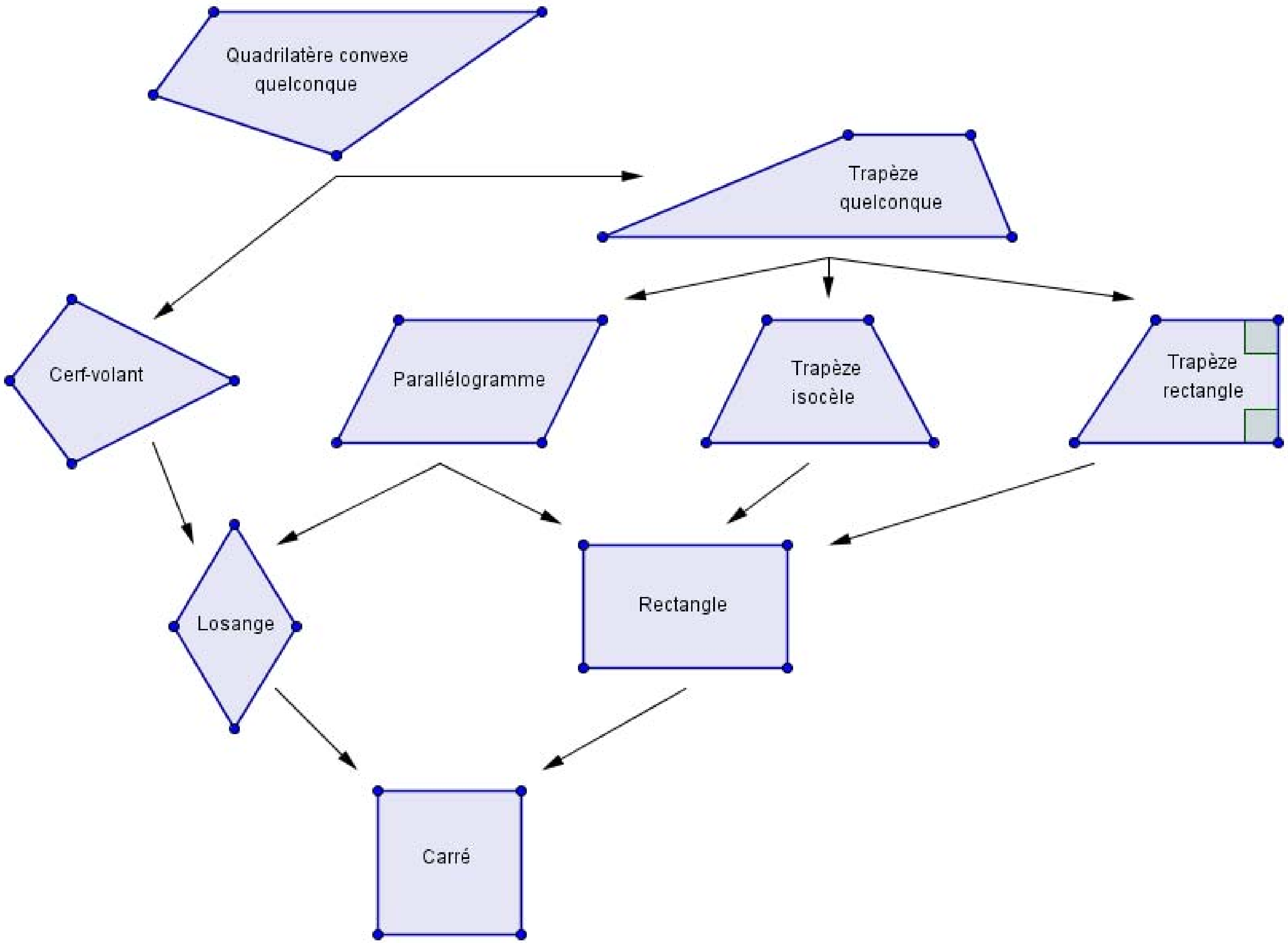
Exercice A1:

1) Parmi tous les quadrilatères ci-dessous, quels sont ceux qui sont convexes ?
2) A chaque quadrilatère convexe, attribuez le nom qui le décrit de la manière la plus précise, en remplissant le tableau suivant :

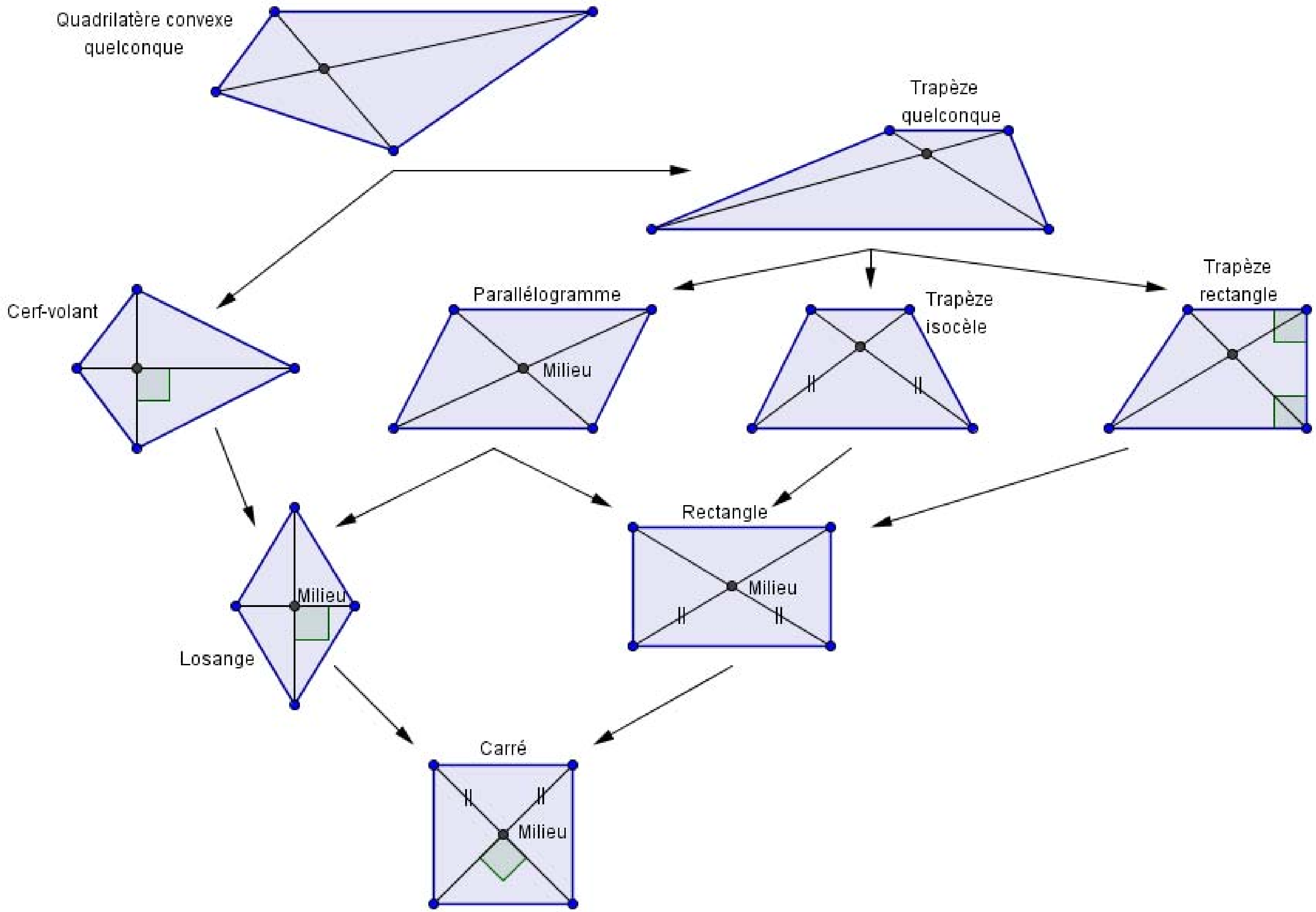


Quadrilatère n° :	Convexe ? Oui : o - Non : n	Nature du quadrilatère
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Classification des quadrilatères suivant les propriétés des côtés



Classement des quadrilatères suivant les propriétés sur les diagonales



B Aires et périmètres de figures polygonales

B1 Généralités sur les côtés d'un polygone

Si on veut déterminer de manière mathématique les longueurs de côtés, il est plus facile de faire ceci à partir de côtés droits (tracés suivant les lignes des feuilles quadrillées) que pour des côtés obliques (*schief*). C'est pourquoi en classes de 7e et 6e, pour les calculs, nous allons nous limiter à la détermination de longueurs de « côtés droits ».

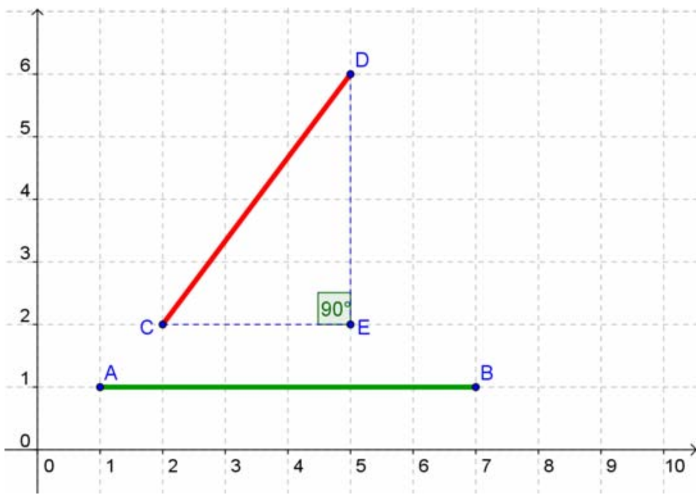
Exemples et contre-exemple sur la même figure

La mesure des segments $[AB], [CE]$ est relativement facile, il faut en effet prendre la différence positive des abscisses de ces différents points pour obtenir :

$$AB = abs(B) - abs(A) = 7 - 1 = 6$$
$$CE = abs(E) - abs(C) = 5 - 2 = 3$$

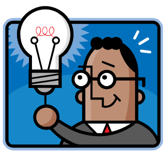
Pour déterminer la longueur du segment $[DE]$, on procède de la même façon avec les ordonnées :

$$DE = abs(D) - abs(E) = 6 - 2 = 4$$



Or, pour contrôler que la longueur du segment oblique $[CD]$ vaut exactement 5, il faut utiliser le théorème de Pythagore *(ancien Grec, 300 ans avant J.-C.)* appliqué au triangle rectangle $\Delta(CED)$, ce qui ne se fera qu'en classe de 5e .

Pour les mathématiciens précoces, voici comment on calcule cette longueur :



$$\left.\begin{aligned} CD^2 &= CE^2 + ED^2 \\ &= 3^2 + 4^2 \\ &= 9 + 16 \\ &= 25 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad CD = 5 \quad \text{(unités de longueur)}$$

B2 Périmètre d'un polygone en général

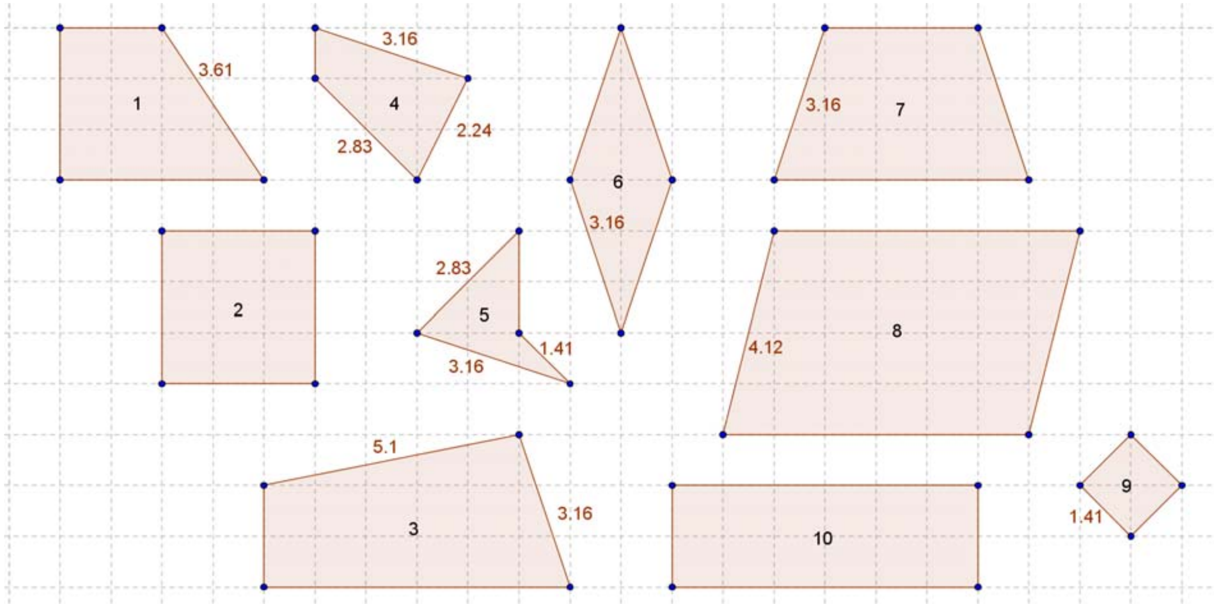
Pour déterminer le périmètre d'un polygone en classe de 7e, il faut connaître les longueurs des côtés de ce polygone ou alors des côtés parallèles ayant même longueur (parallélogramme).

Dans un triangle, p. ex., il y a toujours au moins un côté oblique. Pour déterminer donc le périmètre de ce triangle, il faut au moins connaître la longueur du(des) côté(s) oblique(s). Il en est de même pour les trapèzes, parallélogrammes et losanges.

Exercice B1 : (*Indication : Il est utile de bien avoir compris l'exercice A1*)

1) Déterminez les périmètres des polygones suivants en vous servant des indications données par le quadrillage (unité de mesure : 1 carreau = 1 cm).

2) Comparez ensuite le périmètre de la figure 2 au périmètre de la figure 2 que vous obtiendriez, si on avait défini l'unité de mesure comme étant : 1 carreau = 2 cm.



B3 Périmètres de rectangles et carrés

Les rectangles et carrés étant les polygones qui sont placés très souvent sur les lignes du quadrillage d'une feuille, ce sont en fait – dans ce cas - les seules figures dont nous pouvons « lire » les périmètres sur le quadrillage. C'est pourquoi on établit également des formules pour calculer les périmètres de ces figures, car ces formules constituent la base de toutes les formules d'aires de figures polygoniales quelconques, comme nous allons le voir.

Comme le carré n'est qu'un cas spécial du rectangle, nous allons essentiellement nous concentrer sur le rectangle.

D'après les propriétés du rectangle, nous savons que ses côtés opposés sont parallèles et de même longueur.
Par conséquent, en nous basant sur la figure ci-jointe, nous pouvons retenir :

$$AB = CD = a \text{ et } BC = DA = b,$$

ce qui nous amène à la formule du périmètre, bien connue de par l'école primaire (ou fondamentale) :

$$\boxed{\text{Périmètre}_{\text{Rectangle}} = P_{\text{rectangle}} = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot \underbrace{(a+b)}_{\text{Demi-périmètre}} \qquad \text{avec } a \perp b}$$

Dans le cas de notre figure :

$a = 3,\ b = 7 \qquad \Rightarrow P_{\text{rectangle}} = 2 \cdot (3+7) = 20$ unités de longueurs (u.l.)

L'unité de mesure que nous choisissons le plus souvent en géométrie est le centimètre (cm).

Remarque : *Très souvent, les côtés a et b sont désignés soit par longueur et largeur, soit par base et hauteur, de sorte que la formule textuelle à retenir est donnée par* : $\boxed{\textit{Périmètre} = 2 \cdot \textit{base} + 2 \cdot \textit{hauteur}}$.

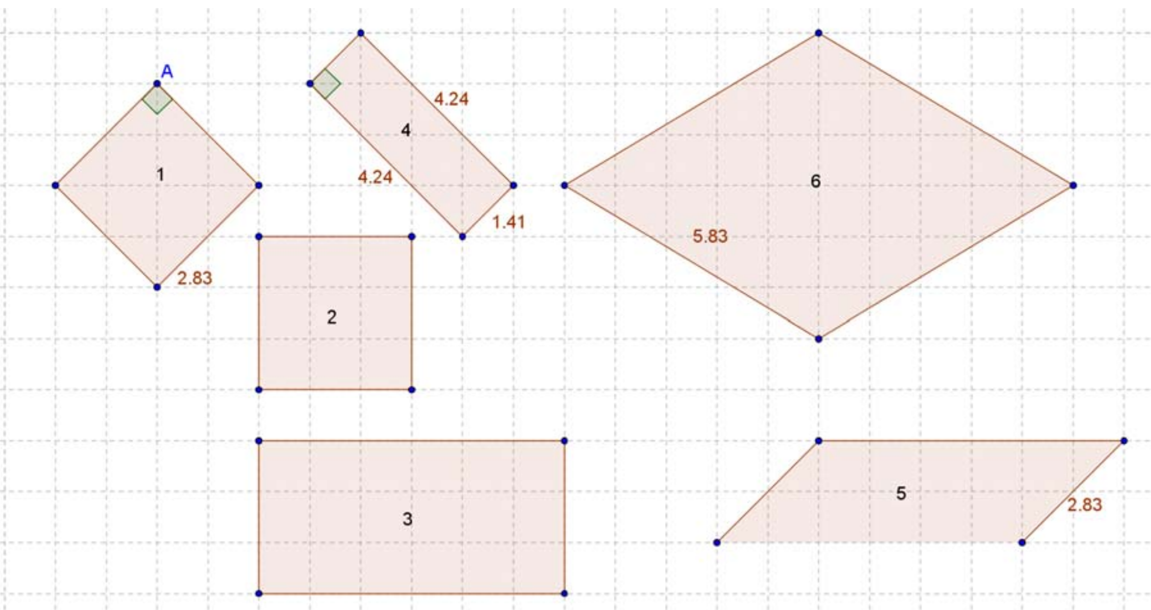
Pour le cas du parallélogramme, la formule du rectangle reste valable, si on connaît les longueurs des côtés obliques.

Pour le cas spécial du carré, dont les 4 côtés ont même longueur, la formule devient : $\boxed{P_{\text{carré}} = 4 \cdot a}$

Pour le cas du losange, la formule du carré reste valable, si on connaît les longueurs des côtés (obliques) c : $\boxed{P = 4 \cdot c}$

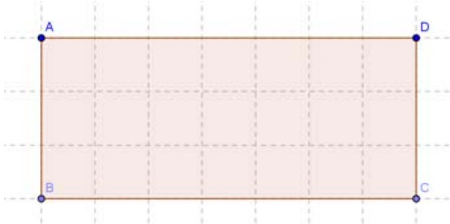
Exercice d'entraînement de l'utilisation des formules

Déterminez d'abord la nature de la figure et calculez ensuite les périmètres des figures suivantes en utilisant la formule appropriée pour cette figure. Mettez ensuite les figures numérotées dans l'ordre croissant de leur périmètre.



B4 Aire d'un rectangle

Comme pour le périmètre, la formule de l'aire du rectangle est la formule sur laquelle se basent toutes les formules d'aires des autres quadrilatères et même celle du triangle et de toute autre figure polygonale.



Reprenons l'exemple utilisé déjà pour le périmètre :

Nous savons : $AB = CD = a$ et $BC = DA = b$ et, ce qui est très important pour la suite, que les côtés consécutifs d'un rectangle sont perpendiculaires.

Ceci nous amène à la formule de l'aire, bien connue de par l'école primaire (ou fondamentale) :

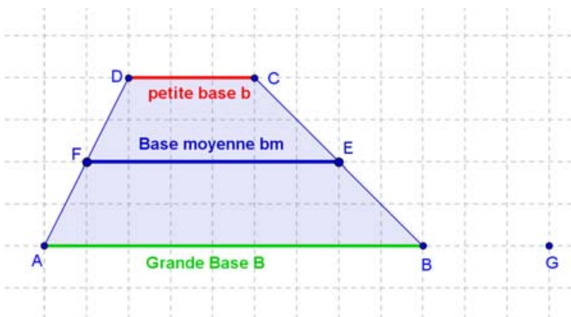
$\boxed{\text{Aire}_{\text{Rectangle}} = \mathscr{A}_{\text{rectangle}} = a \cdot b \qquad \text{avec } a \perp b}$ ou encore sous forme de texte :

$\boxed{Aire = \underline{b}ase \cdot \underline{h}auteur = b \cdot h \qquad avec\ \underline{b}ase \perp \underline{h}auteur}$

Dans le cas de notre figure : $a = 3,\ b = 7 \qquad \Rightarrow \mathscr{A}_{\text{rectangle}} = 3 \cdot 7 = 21\ \underline{\text{u}}\text{nités d'}\underline{\text{a}}\text{ire}\ \ (\text{u.a.})$

B5 Généralisation de la formule de l'aire d'un rectangle

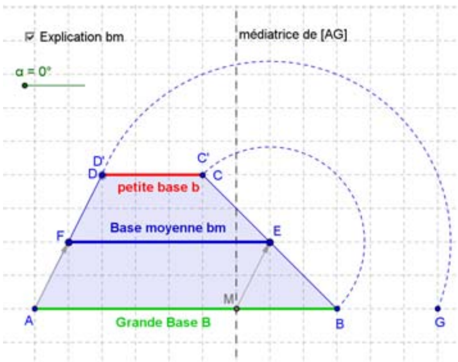
Pour obtenir une formule unique qui nous permet de calculer l'aire de tous les trapèzes, quadrilatères qui ont la propriété d'avoir au moins deux côtés parallèles appelées **bases**, il faut comprendre la notion de base moyenne.

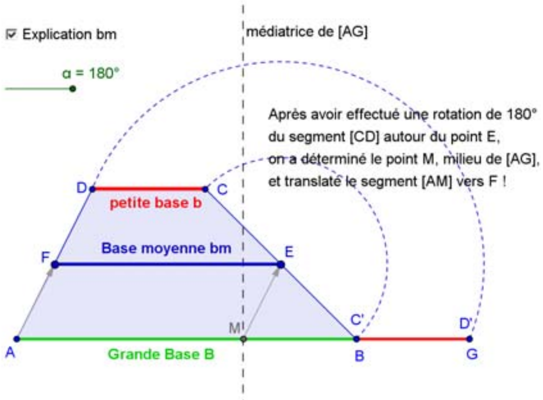


En effet, dans un trapèze quelconque, les deux bases sont de longueurs différentes. Pour calculer l'aire du trapèze à l'aide de la formule du rectangle $Aire = b \cdot h$, nous ne savons donc pas quelle base choisir.

En fait, il faut d'abord déterminer la base moyenne dont la longueur est la moyenne arithmétique des deux bases du trapèze : **Base moyenne** = $\boxed{b_m = \dfrac{B+b}{2}}$

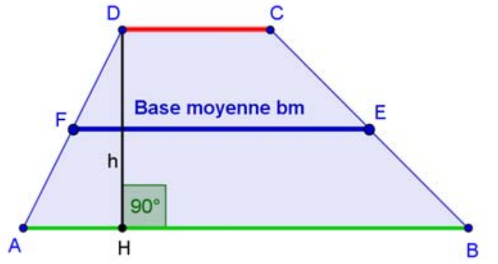
Les deux figures suivantes servent à illustrer comment on arrive à cette base moyenne du point de vue géométrique.





Nous constatons que la base moyenne est parallèle aux deux autres bases du trapèze.

La **hauteur *h*** est définie comme étant la distance entre ces deux bases.

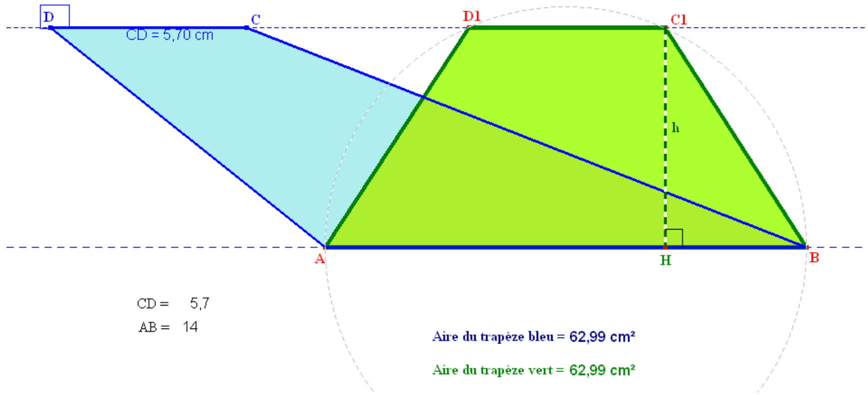


Ainsi, pour calculer l'aire d'un trapèze, on peut utiliser une formule qui ne diffère que très peu de celle du rectangle :

$$\boxed{Aire = b_m \cdot h \qquad avec\ b_m \perp h}$$

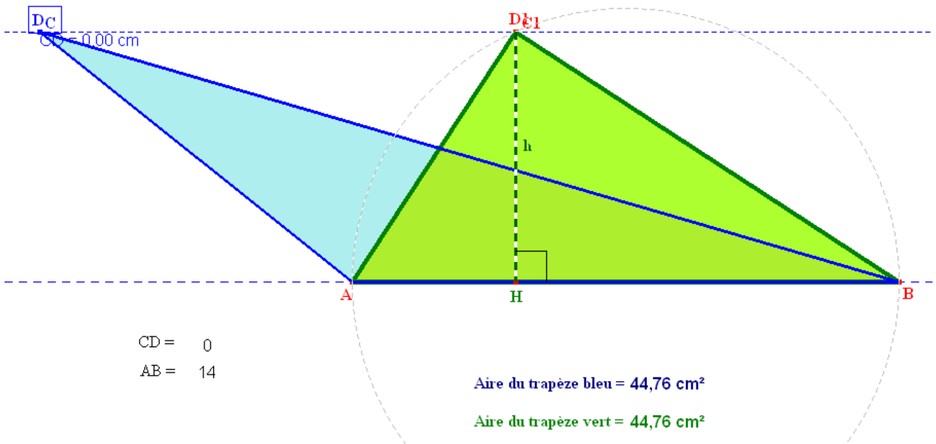
Qu'elle soit belle et bien similaire à celle du rectangle s'illustre aisément par la figure ci-jointe.

En bougeant la base supérieure d'un trapèze (ou parallélogramme, rectangle ou encore carré) le long de la parallèle à la base principale passant par les points C et D, sans pour autant changer la longueur de cette base, l'aire du trapèze ne change pas, puisque les longueurs des bases et de la hauteur ne changent pas.



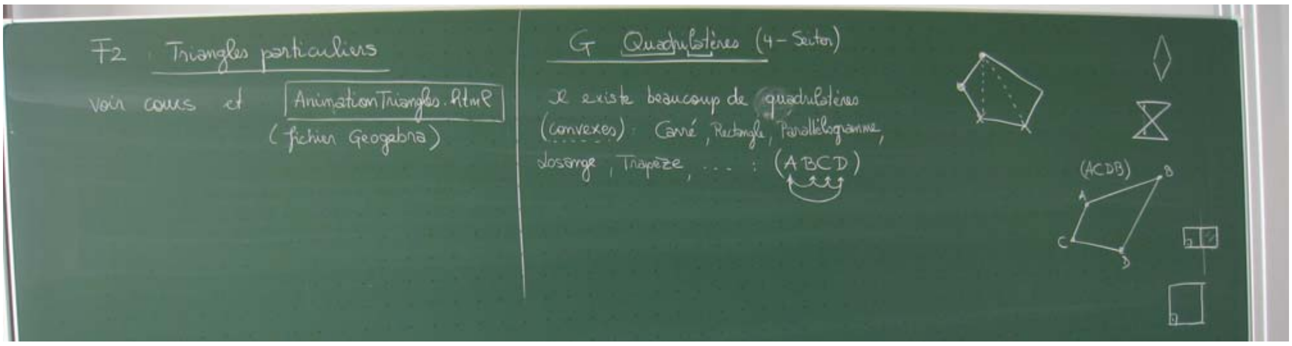
L'aire est toujours donnée par la formule tout à fait générale: $Aire = \dfrac{b_1 + b_2}{2} \cdot h \qquad avec\ \ b \perp h$

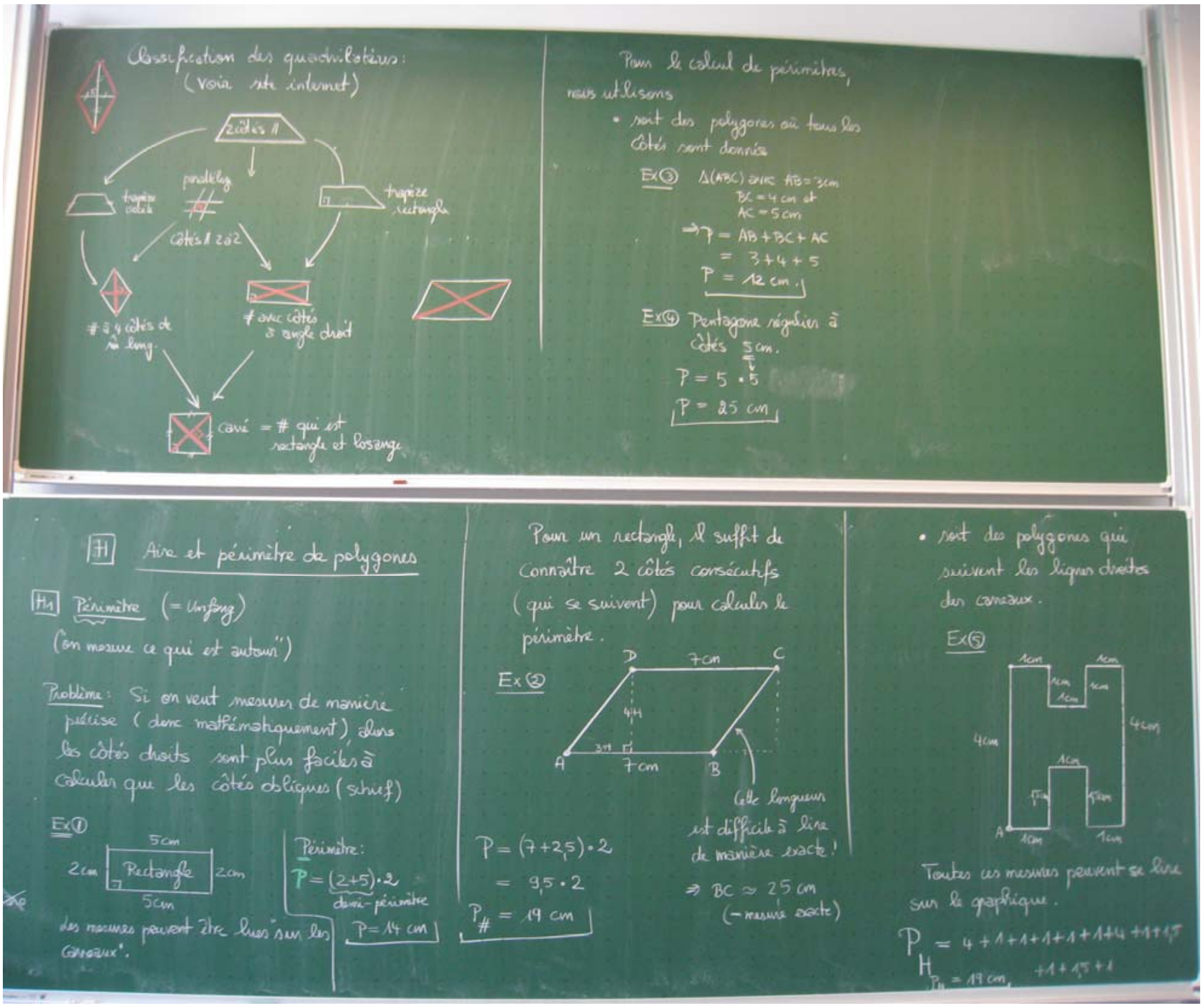
Cas particulier où la base supérieure est nulle: Le triangle



Exercices du livre p.22/23

6 - 7 - 10 - 15 – 16


F2 Triangles particuliers
voir cours et AnimationTriangles.html
(fichier Geogebra)
G Quadrilatères (4-Seiten)
Il existe beaucoup de quadrilatères
(convexes) : Carré, Rectangle, Parallélogramme,
losange, Trapèze, ... : (ABCD)
(ACDB)


Classification des quadrilatères :
(voir site internet)
2 côtés //
trapèze rectangle
côtés // 2 à 2
carré = # qui est rectangle et losange
Pour le calcul de périmètres,
nous utilisons
• soit des polygones où tous les côtés sont donnés
Ex③ Δ(ABC) avec AB = 3cm
BC = 4 cm et
AC = 5 cm
→ P = AB + BC + AC
= 3+4+5
P = 12 cm
Ex④ Pentagone régulier à côtés 5 cm.
P = 5 · 5
P = 25 cm
H Aire et périmètre de polygones
H1 Périmètre (= Umfang)
("on mesure ce qui est autour")
Problème : Si on veut mesurer de manière précise (donc mathématiquement) alors les côtés droits sont plus faciles à calculer que les côtés obliques (schief)
Ex①
5cm
2cm Rectangle 2cm
5cm
Périmètre :
P = (2+5)·2
demi-périmètre
P = 14 cm
Pour un rectangle, il suffit de connaître 2 côtés consécutifs (qui se suivent) pour calculer le périmètre.
Ex②
D 7cm C
A 7cm B
P = (7+2,5)·2
= 9,5 · 2
P = 19 cm
Cette longueur est difficile à lire de manière exacte !
⇒ BC ≈ 2,5 cm
(- mesure exacte)
• soit des polygones qui suivent les lignes droites des carreaux.
Ex⑤
1cm
4cm
A
Toutes ces mesures peuvent se lire sur le graphique.
P = 19 cm