Chapitre Math1-3 : Les systèmes linéaires

Remarque : Dans ce chapitre sur les systèmes linéaires, aucune méthode de résolution n'est prescrite. Cependant, il est utile de les connaître toutes, car suivant les cas, on a besoin de l'une ou l'autre pour la résolution et l'interprétation géométrique.

A Systèmes d'équations linéaires

<u>Exercices d'entraînement, sans solution</u>

Résolvez et interprétez géométriquement les systèmes d'équations suivants:

$$a)\quad \begin{cases} x - y - 3z = -5 & (1) \\ x + 3y - z = 11 & (2) \\ 3x + y + 5z = 1 & (3) \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} x - 2y - 3z = 2 & (1) \\ x - 4y - 13z = 14 & (2) \\ -3x + 5y + 4z = 0 & (3) \end{cases}$$

$$c)\quad \begin{cases} x + y + z = 4 & (1) \\ 2x + 5y - 2z = 3 & (2) \\ x + 7y - 7z = 5 & (3) \end{cases} \qquad d)\quad \begin{cases} 2x + 5y - 3z = 1 & (1) \\ x + 2y + 4z = 5 & (2) \end{cases}$$

B Systèmes d'équations linéaires avec paramètre réel

<u>Exercices d'entraînement, sans solution</u>

Discutez, résolvez et interprétez géométriquement les systèmes d'équations suivants, où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre réel :

$$a)\quad \begin{cases} mx + y + z = 3 & (1) \\ x + my + z = 2 & (2) \\ x + y + mz = -1 & (3) \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} x + my + z = 2m & (1) \\ x + y + mz = 0 & (2) \\ (m+1)x + my + z = m & (3) \end{cases}$$

$$c)\quad \begin{cases} mx + y + mz = 0 & (1) \\ mx + my + z = 0 & (2) \\ (m+1)x + y + mz = 1 & (3) \end{cases} \qquad d)\quad \begin{cases} x + y + mz = 1 & (1) \\ x + my + z = m & (2) \\ mx + y + z = m^2 & (3) \end{cases}$$

C Systèmes d'équations linéaires avec paramètre réel – Examens

$D-09/2015$ $\begin{cases} mx - my + z = 1 & (1) \\ x - y + mz = -1 & (2) \\ (m-2)x + (m-2)y + (m-2)z = 0 & (3) \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$

$D-06/2015$ $\begin{cases} x + y - z = 1 & (1) \\ 2x + 3y + mz = 3 & (2) \\ x + my + 3z = 2 & (3) \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$

$D-09/2014$ $\begin{cases} my + z = 2 & (1) \\ \frac{2}{3}mx + y = -2 & (2) \\ 2mx - y - mz = m & (3) \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$

$D-06/2014$ $\begin{cases} x + 3y + 2mz = 0 & (1) \\ mx + 2my + z = m & (2) \\ -mx + my + 2z = 0 & (3) \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$

$D-09/2013$ $\begin{cases} mx - y + z = m & (1) \\ -x + 2y + mz = 2 & (2) \\ -x - y - mz = -1 & (3) \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$

$D-06/2013$ $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 & (1) \\ -x + my + 2z = 5 & (2) \\ 7x + 3y + (m-5)z = 7 & (3) \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$

$D-09/2012$ $\begin{cases} mx + my - 3z = 0 & (1) \\ 2x - y + 2z = 5 & (2) \\ 7x + (m-3)y + 3z = 15 & (3) \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$

*) Pour quelles valeurs de m, le système admet-il une solution unique ?
**) Résoudre ensuite le système lorsque $m = 3$.
***) Résoudre le système lorsque $m = 1$. Interprétez géométriquement ce résultat.

$D-06/2012$ $\begin{cases} x + my + (m+1)z = m & (1) \\ x + my + z - 2m = 0 & (2) \\ mx + y + z + 1 = 1 & (3) \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$

Exercice 2

Résolvez le système d'équations donné suivant les valeurs du paramètre réel m et donnez une interprétation géométrique du résultat obtenu.

$$(S)\equiv\begin{cases} x + 3y + 2mz = 2 \\ mx + 2my + z = 2m-1 \\ -mx + my + 2z = 2m \end{cases}$$

Résolution :

Déterminant principal : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2m \\ m & 2m & 1 \\ -m & m & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 3 \\ m & 2m \\ -m & m \end{matrix} = 4m-3m+2m^3+4m^3-m-6m$

$$\Delta = 6m^3+6m = 6m\underbrace{\left(m^2+1\right)}_{>0} \qquad \Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m=0$$

- Si $m=0$, le système n'admet pas de solution unique.

  Le système se ramène alors à : $(S)\equiv\begin{cases} x + 3y = 2 \\ z = -1 \\ z = 0 \end{cases}$ qui est un système impossible,

  composé par deux plans parallèles $(P_1)\equiv z=-1$ et $(P_2)\equiv z=0$, coupés par un autre plan sécant.

- Pour $m\neq 0$, le système admet une solution unique :

  $\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2m \\ 2m-1 & 2m & 1 \\ 2m & m & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 2m-1 & 2m \\ 2m & m \end{matrix} = 8m+6m+4m^3-4m^2-8m^3-2m-12m+6$

  $\Delta_x = -4m^3-4m^2+6 \qquad x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{-4m^3-4m^2+6}{m\left(m^2+1\right)}$

  $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2m \\ m & 2m-1 & 1 \\ -m & 2m & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ m & 2m-1 \\ -m & 2m \end{matrix} = 4m-2-2m+4m^3+4m^3-2m^2-2m-4m$

  $\Delta_y = 8m^3-2m^2-m-2 \qquad y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{8m^3-2m^2-m-2}{m\left(m^2+1\right)}$

  $\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ m & 2m & 2m-1 \\ -m & m & 2m \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 3 \\ m & 2m \\ -m & m \end{matrix} = 4m^2-6m^2+3m+2m^2+4m^2-2m^2+2m-6m^2$

  $\Delta_z = -8m^2+5m \qquad z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{-8m^3+5m}{m\left(m^2+1\right)} = \dfrac{-8m+5}{m^2+1}$

- $S = \left\{\left(\dfrac{-4m^3-4m^2+6}{m\left(m^2+1\right)};\dfrac{8m^3-2m^2-m-2}{m\left(m^2+1\right)};\dfrac{-8m+5}{m^2+1}\right),\ m\in\mathbb{R}_0\right\}$