Les exercices portant sur les fonctions exponentielles

Les exercices portant sur les fonctions exponentielles peuvent être classés en 4 catégories distinctes :

a) Les équations et inéquations exponentielles
b) Les exercices portant sur les limites
c) Les exercices portant sur la dérivation de fonctions exponentielles
d) Les exercices traitant la manipulation de graphe de la fonction exponentielle

a) Equations et inéquations exponentielles

1) Définition:

Une équation est dite **(in-)équation exponentielle** si l'inconnue apparaît à l'exposant.

Exemples: $3^x = 2$ et $4^{x+1} = 5^{2x-1} \cdot 2^{x+1}$ ou encore $e^x = e \cdot e^{2x-3}$

Pour les sections E, F et G, on se limite aux exercices de base e.

2) Méthodes de résolution

Pour résoudre une **équation exponentielle**, on tâche d'appliquer une des 3 règles suivantes:

Remarque : *La résolution d'inéquations exponentielles se sert des mêmes principes, mais il faut veiller à traiter le tableau des signes après la détermination des racines suivant les méthodes de résolution des équations exponentielles.*

Principe a: Comparaison des exposants

Exemple: $e^{2x-7} = \frac{1}{e} \underset{\text{à la même base}}{\overset{\text{en réduisant}}{\Leftrightarrow}} e^{2x-7} = e^{-1} \underset{\text{des exposants}}{\overset{\text{égalisation}}{\Leftrightarrow}} 2x-7=-1 \Leftrightarrow x=3$

Règle 1: On exprime les membres gauche et droite de l'équation en tant que puissances de même base et on égalise ensuite les exposants.

Ceci nous permet de faire une première série d'exercices. Remarquons que dans chacun de ces exemples, il n'y aura que 2 termes apparaissant dans l'(in-)équation.

Exercices : Résolvez les (in-)équations suivantes

1)	$e^{x+2} = e^{2x+4}$	2)	$e^{2x} \cdot e^x = e^3$
3)	$e^{-2x+1} = 1$	4)	$e^{3x+3} \cdot e^{-2} = e^{x+5}$
5)	$e^{2x+3} < e^{4x-3}$	6)	$e^{x+1} \cdot e^{-x+x^2} > e^{x+3}$

Principe b: Emploi d'une variable auxilliaire

Exemple: $e^{2x-1}-2e^{-(2x-1)}=-1 \iff e^{2x-1}-2\cdot\dfrac{1}{e^{2x-1}}=-1 \;\Big|\cdot e^{2x-1}>0$

$$\iff \left(e^{2x-1}\right)^2+\left(e^{2x-1}\right)-2=0$$

$$\underset{t=e^{2x-1}}{\overset{\text{en posant}}{\iff}} t^2+t-2=0 \quad \text{équation du second degré en } t$$

$$\iff t=-2 \;\; ou \;\; t=1$$

En revenant à la variable x:

$t=e^{2x-1}=-2$ impossible, car $\forall a\in\mathbb{R}:\ e^a>0$

$t=e^{2x-1}=1 \overset{\text{Principe a)}}{=} e^0 \iff 2x-1=0 \Rightarrow S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Règle 2: On substitue l'expression exponentielle par une variable auxilliaire et on résoud d'abord l'équation auxilliaire ainsi obtenue, avant de revenir à la variable initiale.

Remarquons que dans chacun de ces exemples se réduisant à une équation du second degré, il y aura, en général, 3 termes apparaissant dans l'(in-)équation.

Dans le cas où il y avait plus de 3 termes, soit différents termes sont semblables et donc réductibles, soit cette (in-)équation se réduit à une équation d'un degré supérieur à 2. Cette sorte d'(in-)équation se résoud soit par la méthode de regroupement, soit par la méthode de Horner (division de polynômes).
Ce dernier type d'équation (*degré supérieur à 2*) n'apparaît quasiment plus au programme des sections EFG.

Corrigé modèle et commenté d'une inéquation de ce type

$e^{2x}+2e^x-3\leq 0 \qquad (IE)$ 3 termes Pas de condition d'existence, donc $D=\mathbb{R}$

- Posons : $t=e^x>0$ Cette constation aura son importance dans la suite !
  (IE) $t^2+2t-3\leq 0$ Inéquation du second degré

  i) Racines : $\Delta=b^2-4ac=16 \qquad t_1=-3<0 \qquad t_2=1$
  Au contraire d'une équation exponentielle, cette valeur négative ne peut pas tout simplement être rejetée, car elle doit intervenir dans le tableau des signes pour déterminer où l'expression t^2+2t-3 est respectivement positive et négative (*signe de a, sauf entre les racines*).

  ii) Tableau des signes (Tds) :

t	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
t^2+2t-3		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	

  Comme on a posé $t=e^x>0$, il faut maintenant rejeter toute la partie du tableau où la variable t est négative , et non pas seulement la seule valeur racine $t_1=-3$! Nous biffons par conséquent cette partie du tableau.

  iii) Inéquation qui reste à résoudre $t\leq 1$ Il est clair que $t>0$!

•• Revenons à x : $t \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^x \leq 1 = e^0 \quad \underset{\substack{\text{est une bijection} \\ \text{monotone croissante}}}{\overset{\text{Comme exp}}{\Leftrightarrow}} \quad x \leq 0$

••• Solution : $S =]-\infty; 0]$

Exercices : Résolvez les (in-)équations suivantes :

1) $2 \cdot e^{2x+4} + 3 \cdot e^{x+2} - 5 = 0$ 2) $5 \cdot e^x + 6 \cdot e^{-x} + 1 \geq 0$

Remarque : Les deux types d'exercices vues jusque-là sont un peu limités à cause de l'incapacité de pouvoir résoudre une équation exponentielle du type $e^x = a$, avec $a \neq 1$. Pour y remédier, nous allons voir un troisième principe de résolution d'une équation exponentielle, principe qui n'est rien d'autre qu'une généralisation du principe a. On applique la fonction *ln*, réciproque de la fonction exponentielle à base *e*.

Principe c: Logarithmisation de chaque membre

Exemple: $\underbrace{e^x}_{>0} = \underbrace{5}_{>0} \quad \underset{\text{de chaque membre}}{\overset{\text{Logarithmisation}}{\Leftrightarrow}} \quad \ln\left(e^x\right) = \ln(5) \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \underbrace{\ln e}_{=1} = \ln 5$

$\Leftrightarrow \quad x = \ln 5 \approx 1{,}609$

Règle 3: Si les deux membres de l'équation sont sans aucun problème logarithmisables (Produits, quotients ou puissances à valeurs positives), alors on les logarithmise et on résoud ensuite l'équation ainsi obtenue.

Corrigé modèle et commenté d'une inéquation de ce type

$2 \cdot e^{2x-2} - 11 \cdot e^{x-1} + 5 \geq 0 \quad (IE)$ 3 termes Pas de condition d'existence, donc $D = \mathbb{R}$

• Posons : $t = e^{x-1} > 0$ Cette constation aura son importance dans la suite !
$(IE) \quad 2 \cdot t^2 - 11 \cdot t + 5 \geq 0$ Inéquation du second degré

i) Racines : $\Delta = b^2 - 4ac = 81 \qquad t_1 = \frac{1}{2} \quad t_2 = 5$

ii) Tableau des signes (Tds) :

t	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		5		$+\infty$
$2t^2 - 11t + 5$		+	+	+	0	−	0	+	

Comme on a posé $t = e^{x-1} > 0$, il faut maintenant rejeter toute la partie du tableau où la variable t est négative ! Nous biffons par conséquent cette partie du tableau.

iii) Il reste cette fois 2 inéquations à résoudre : $t \leq \frac{1}{2}$ et $t \geq 5$ (Evident: $t > 0$)

•• Revenons à x :

$$\text{a)}\quad t\le\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{x-1}\le\frac{1}{2} \underset{\substack{\text{Comme ln}\\ \text{est une bijection}\\ \text{monotone croissante}}}{\overset{\substack{\text{Logarithmisation}\\ \text{des deux membres}}}{\Leftrightarrow}} \ln\left(e^{x-1}\right)\le\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x-1\le\ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x\le 1+\ln\left(\frac{1}{2}\right) \underset{\text{logarithmes}}{\overset{\text{Cours}}{\Leftrightarrow}} x\le 1-\ln 2$$

ou

$$\text{b)}\quad t\ge 5 \Leftrightarrow e^{x-1}\ge 5 \underset{\substack{\text{Comme ln}\\ \text{est une bijection}\\ \text{monotone croissante}}}{\overset{\substack{\text{Logarithmisation}\\ \text{des deux membres}}}{\Leftrightarrow}} \ln\left(e^{x-1}\right)\ge\ln(5)$$

$$x-1\ge\ln(5) \Leftrightarrow x\ge 1+\ln 5$$

••• Solution : $S=\left]-\infty;1-\ln 2\right]\cup\left[1+\ln 5;+\infty\right[$

Exercices : Résolvez les (in-)équations suivantes :

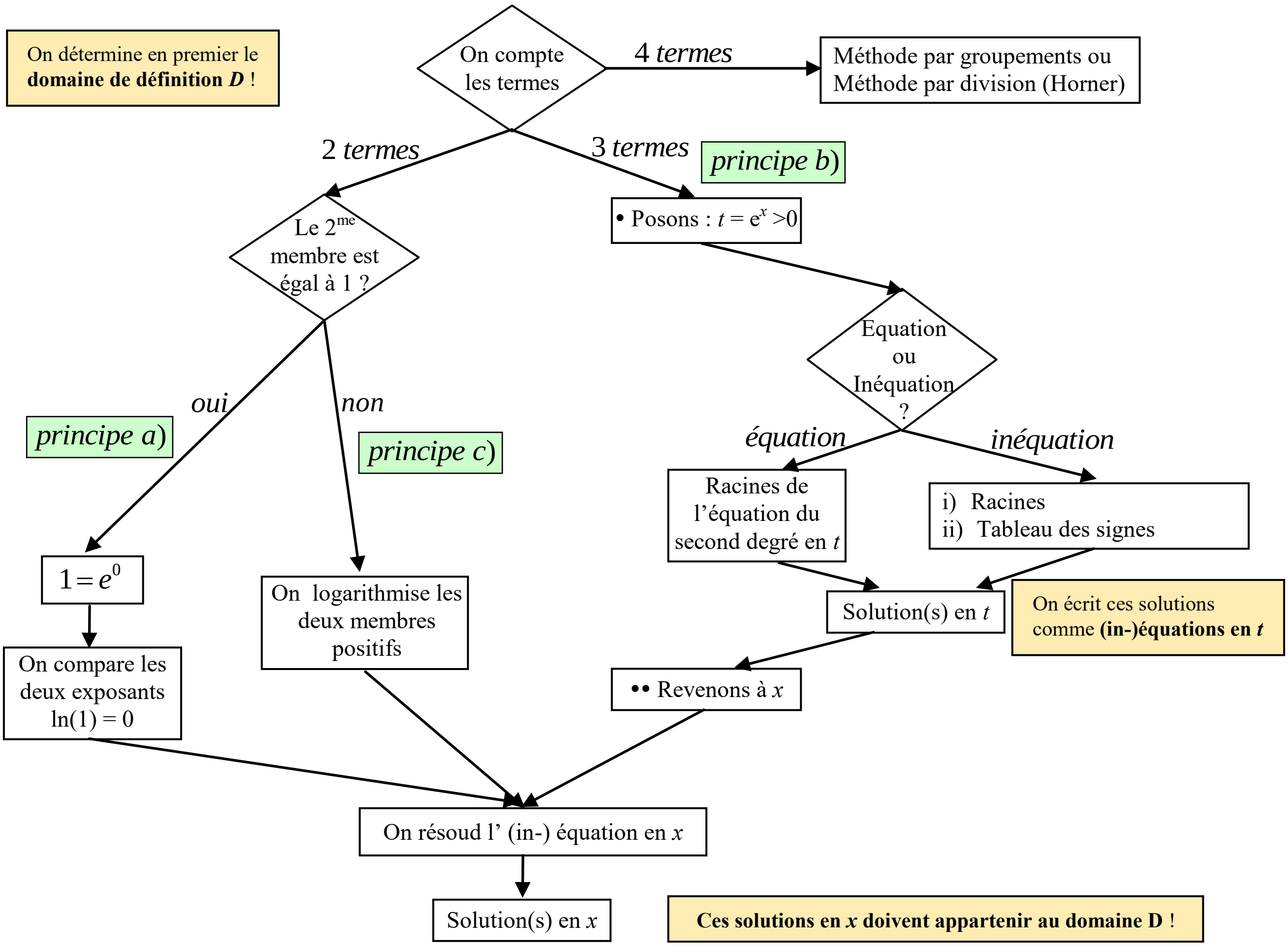
1) $e^{2x+3}=7$ 2) $2\cdot e^{x}\cdot e^{2x-1}\le 3$

3) $2\cdot e^{2x}-e^{x}-6=0$ 4) $3\cdot e^{2x+2}+10\cdot e^{x+1}+8\ge 0$

Ce même type d'exercices se retrouve dans les recherches de domaines d'existence.

Remarque : Le principe a) n'est rien d'autre qu'un cas spécial du principe c) si l'on sait en plus que $\ln(1)=0$.

Schéma de résolution d'(in-)équations exponentielles



<u>Remarque</u> : *Ce qui est vrai pour les équations et inéquations exponentielles à base e, est encore valable pour toute fonction exponentielle à base* $a,\ a \in \mathbb{R}_0^+$, *comme le montrent les exemples suivants, extraits d'examens de fin d'études secondaires.*

Exercices résolus et commentés Résolvez dans $\mathbb{R}$ les (in-)équations suivantes

1)	$3^{1-x} - 3^{2+x} \le 6$	$\boxed{CD-09-2015}$
2)	$2^{1-x} + 6\cdot 2^{x} > 8$	$\boxed{CD-06R-2015}$
3)	$\dfrac{5^{x}+5^{-x}}{1-5^{-x}} = 5$	$\boxed{CD-06-2013}$

Résolutions commentées en détail

$Ad\,1)$ $\boxed{CD-09-2015}$ $3^{1-x} - 3^{2+x} \le 6$

$a)$ $C.E.$: pas de condition $\Rightarrow$ $D=\mathbb{R}$

$b)$ Résolution

La différence de degrés entre 3^{2+x} et 3^{1-x} *est de* $(+1)-(-1)=2$ *. Il s'agit par conséquent d'une inéquation du second degré, fait qui se vérifie également par le fait qu'il existe ici trois termes, même si ceci n'est pas une nécessité absolue.*

Pour résoudre une (in-)équation du second degré, on rend « tous les degrés positifs » en multipliant par le nombre strictement positif 3^x*, facteur qui fait disparaître le facteur* 3^{-x}*.*

$3^{1-x} - 3^{2+x} \le 6 \ \Big|\cdot 3^x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{1-x}\cdot 3^x - 3^{2+x}\cdot 3^x \le 6\cdot 3^x$

$\Leftrightarrow \quad 3^{1\cancel{-x}\cancel{+x}} - 3^{2+x+x} \le 6\cdot 3^x \quad \Leftrightarrow \quad 3 - 3^2\cdot 3^{2x} \le 6\cdot 3^x$

Comme il s'agit d'une inéquation du second degré, on ramène tous les termes dans un même membre $\Leftrightarrow \quad 0 \le 9\cdot 3^{2x} + 6\cdot 3^x - 3 \,|:3 \quad \Leftrightarrow \quad 3\cdot 3^{2x} + 2\cdot 3^x - 1 \ge 0$

- Posons $\boxed{t=3^x>0}$: $3\cdot 3^{2x} + 2\cdot 3^x - 1 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\cdot t^2 + 2\cdot t - 1 \ge 0$

Cette inéquation du second degré se résout par :
« *i) Racines, ii) Tableau des signes, …* iii) Solution(s) »

$i)$ *Racines :* $t=-1 \quad t=\dfrac{1}{3}$

$ii)$ *Tds :*

t		-1		0		$\frac{1}{3}$	
$3t^2+2t-1$	+	0	−	−	−	0	+

$iii)$ *Solution en t :* $t \ge \dfrac{1}{3}$

•• Revenons à x: $t=3^x \ge \dfrac{1}{3} = 3^{-1} \ (base>1) \quad \Leftrightarrow \quad x \ge -1 \quad \Rightarrow \quad E=[-1;+\infty[$

$c)$ Solution : $S = E \cap D = [-1;+\infty[$

Ad 2) $\boxed{CD-06R-2015}$ $\quad 2^{1-x}+6\cdot 2^{x}>8$

a) *C.E.*: pas de condition $\Rightarrow \quad D=\mathbb{R}$

b) Résolution

La différence de degrés entre 2^{x} et 2^{1-x} *est de* $(+1)-(-1)=2$ *. Il s'agit par conséquent d'une inéquation du second degré.*

Pour résoudre une (in-)équation du second degré, on rend « tous les degrés positifs » en multipliant par le nombre strictement positif 2^{x} *, facteur qui fait disparaître le facteur* 2^{-x} *.*

$$2^{1-x}+6\cdot 2^{x}>8 \;\Big|\cdot 2^{x}>0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{1-x}\cdot 2^{x}+6\cdot 2^{x}\cdot 2^{x}>8\cdot 2^{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{1\cancel{-x}\cancel{+x}}+6\cdot 2^{2x}>8\cdot 2^{x} \Leftrightarrow \quad 2+6\cdot 2^{2x}>8\cdot 2^{x}$$

Comme il s'agit d'une inéquation du second degré, on ramène tous les termes dans un même membre $\Leftrightarrow \quad 6\cdot 2^{2x}-8\cdot 2^{x}+2>0 \,|:2 \Leftrightarrow \quad 3\cdot 2^{2x}-4\cdot 2^{x}+1\geq 0$

- Posons $\boxed{t=2^{x}>0}$: $\; 3\cdot 2^{2x}-4\cdot 2^{x}+1>0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\cdot t^{2}-4\cdot t+1>0$

Cette inéquation du second degré se résout par :
« *i) Racines, ii) Tableau des signes, …* iii) Solution(s) »

i) *Racines*: $\quad t=\frac{1}{3} \quad t=1$

ii) *Tds*:

t		0		$\frac{1}{3}$		1	
$3t^{2}-4t+1$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$

iii) *Solutions en t*: $\quad t<\frac{1}{3}$ ou $t>1$

•• Revenons à x: $\quad t=2^{x}<\frac{1}{3} \quad$ *ou* $\quad t=2^{x}>1=2^{0} \qquad (base=2>1)$

$$\Leftrightarrow \quad x<\log_{2}\left(\frac{1}{3}\right)=-\log_{2}(3) \; ou \qquad x>0$$

$$\Rightarrow \; E=\left]-\infty;-\log_{2}(3)\right[\cup\left]0;+\infty\right[$$

c) Solution: $\quad S=E\cap D=\left]-\infty;-\log_{2}(3)\right[\cup\left]0;+\infty\right[\qquad \left(avec:-\log_{2}(3)\approx -1{,}58\right)$

<u>Remarque</u> : *Le commentaire écrit en bleu-italique n'est pas nécessaire dans un devoir, mais il sert essentiellement à vous communiquer le raisonnement à utiliser pour la résolution d'un tel exercice.*

Ad 3) $\boxed{CD-06-2013}$ $\dfrac{5^x+5^{-x}}{1-5^{-x}}=5$

a) *C.E.*: $1-5^{-x}\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 1\neq 5^{-x} \quad\Leftrightarrow\quad x\neq 0 \quad\Rightarrow\quad D=\mathbb{R}_0=\mathbb{R}-\{0\}$

b) Résolution

Comme il s'agit ici d'une équation, nous pouvons multiplier par le dénominateur non nul. (Dans le cas d'une inéquation, il aurait fallu réduire au dénominateur commun, puisque le dénominateur renferme une inconnue et peut changer de signe !)

$$\forall x\in\mathbb{R}_0: \quad \frac{5^x+5^{-x}}{1-5^{-x}}=5 \quad\Leftrightarrow\quad 5^x+5^{-x}=5\cdot\left(1-5^{-x}\right) \quad\Leftrightarrow\quad 5^x+5^{-x}=5-5\cdot 5^{-x}$$

$$\Leftrightarrow\quad 5^x+6\cdot 5^{-x}=5 \;\Big|\cdot 5^x\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 5^{2x}-5\cdot 5^x+6=0$$

Pour résoudre cette équation du second degré, on a rendu « tous les degrés positifs » en multipliant par le nombre strictement positif 5^x*, facteur qui fait disparaître le facteur* 5^{-x}*. Par la suite on a ramené tous les termes dans un même membre.*

- Posons $\boxed{t=5^x>0}$: $5^{2x}-5\cdot 5^x+6=0 \quad\Leftrightarrow\quad t^2-5\cdot t+6=0$

  $\Leftrightarrow\quad t=2>0$ ou $t=3>0$

  Ces deux solutions en t sont positives, donc acceptables.

•• Revenons à x: $t=5^x=2$ *ou* $t=5^x=3$ $(base>1)$

$\Leftrightarrow\quad x=\log_5(2)$ *ou* $x=\log_5(3)$

$\Rightarrow\quad E=\{\log_5(2);\log_5(3)\}$

c) Solution : $S=E\cap D=\{\log_5(2);\log_5(3)\}$

<u>*Remarque*</u> *: Le commentaire écrit en bleu-italique n'est pas nécessaire dans un devoir, mais il sert essentiellement à vous communiquer le raisonnement à utiliser pour la résolution d'un tel exercice.*