Chapitre 2	Géométrie analytique de l'espace

Table des matières

Rappels 2
Repère dans l'espace 2
Vecteurs dans l'espace 3
Colinéarité de deux vecteurs 5
Orthogonalité de deux vecteurs 6
Combinaison linéaire de deux vecteurs 6
Plans dans l'espace 8
Equation vectorielle et système d'équations paramétriques d'un plan 9
Equation cartésienne d'un plan 10
Vecteur normal à un plan 14
Droites dans l'espace 15
Equation vectorielle et système d'équations paramétriques d'une droite 15
Système d'équations cartésiennes d'une droite 17
Problèmes d'intersection 19
Position relative de deux droites 19
Position relative d'une droite et d'un plan 22
Position relative de deux plans 23

Chapitre 16	**Géométrie analytique de l'espace – EM56**
Cours	16.1 Equations de plans 16.2 Equations de droites 16.3 Problèmes d'intersection
Exercices	**819-823, 827, 829, 830, 833, 836-839, 841-846**
Ex. pour s'autocontrôler	**856-858, 862(b,c), 863-865**

Chapitre 2	Géométrie analytique de l'espace

Géométrie analytique de l'espace

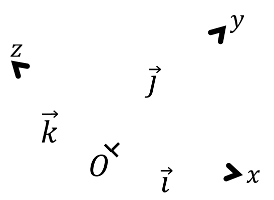
Espace Math 56** (De Boeck) – **pages 311-322

Rappels

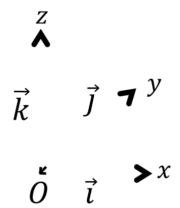
Repère dans l'espace

On appelle **repère de l'espace** tout quadruplet $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ constitué d'un point $O(0; 0; 0)$ de l'espace (l'origine) et de trois vecteurs non coplanaires (pas dans le même plan) :

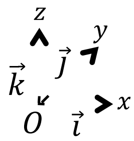
- (Ox) est l'axe des **abscisses**, (Oy) est l'axe des **ordonnées** et (Oz) est l'axe des **cotes**.
- Lorsque les droites (Ox), (Oy) et (Oz) sont perpendiculaires, le repère est dit **orthogonal**.
- Si de plus $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = \mathbf{1}$, le repère est dit **orthonormé** *(ou orthonormal).*



repère quelconque de l'espace



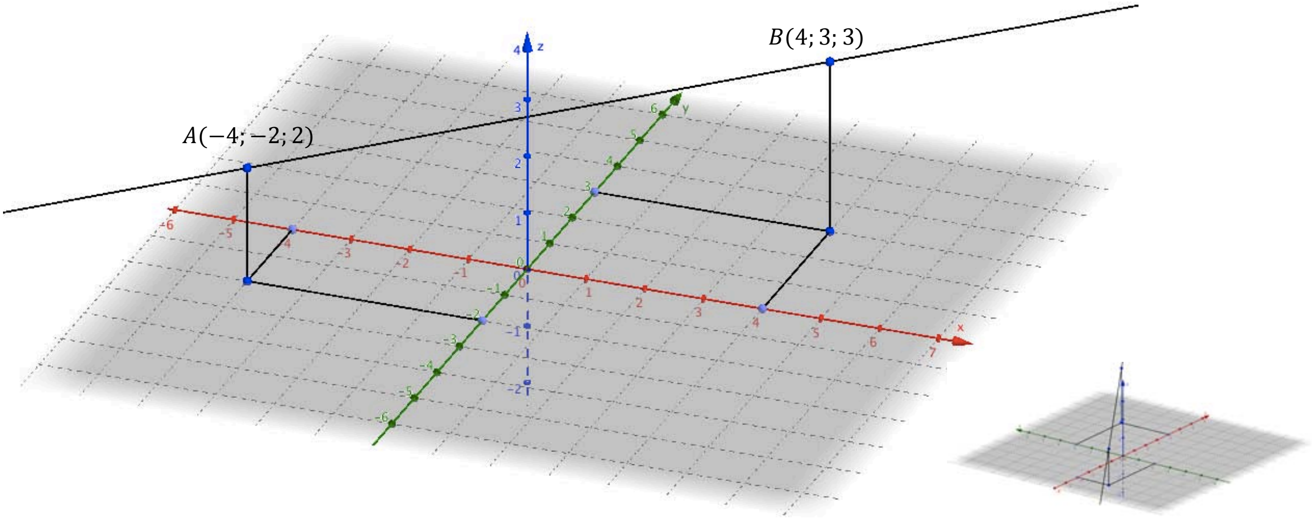
repère orthogonal



repère orthonormé

Remarques

- Le plan (xOy) est le plan horizontal du repère.
  Le plan (xOz) est le plan de profil du repère.
  Le plan (yOz) est le plan vertical du repère.
- Dans un repère de l'espace, un point est repéré à l'aide d'un triplet de coordonnées $\boldsymbol{M(x; y; z)}$.
- Dans toute la suite, sauf mention contraire, $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ désignera un **r**epère **o**rtho**n**ormé (**RON**) de l'espace avec $O(0; 0; 0)$, $\vec{\imath}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$.



Vecteurs dans l'espace

Les vecteurs dans l'espace possèdent les mêmes propriétés que les vecteurs dans le plan.
Comme l'espace est de dimension 3, un vecteur de l'espace dispose de trois composantes :

$\vec{u}\begin{pmatrix} abscisse \\ ordonnée \\ \boldsymbol{cote} \end{pmatrix}$ noté parfois : $\vec{u}(abscisse; ordonnée; \boldsymbol{cote})$ *pour gagner de la place*.

Coordonnées d'un point et composantes d'un vecteur dans l'espace

- Soit $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ un repère de l'espace :
  Dire qu'un **vecteur $\vec{u}$** a pour **composantes** $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z})$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ signifie que :
  $$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$
  Le vecteur $\vec{u}$ est noté : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- Dire qu'un **point M** a pour **coordonnées** $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z})$ dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ signifie que :
  $$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$
  Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est noté : $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
  et le point M est noté : $M(x; y; z)$ ($\boldsymbol{x}$ est **l'abscisse**, $\boldsymbol{y}$ est **l'ordonnée** et $\boldsymbol{z}$ est **la cote** de M)

Dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ on donne deux points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.

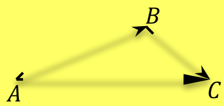
Le **vecteur $\overrightarrow{AB}$** est alors représenté par le couple de ses composantes, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$ extrémité moins origine

Relation de Chasles

Pour trois points quelconques A, B et C, l'égalité suivante est toujours vraie.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$ *(relation de* Chasles*)*



Egalité de deux vecteurs

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Alors :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Somme de deux vecteurs

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Alors :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= (\vec{u} + \vec{v})\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$$

Produit d'un vecteur par un réel

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors :

$$k \cdot \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= (k \cdot \vec{u})\begin{pmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \\ k \cdot z \end{pmatrix}$$

Norme d'un vecteur

Soient $\boldsymbol{A(x_A; y_A; z_A)}$ et $\boldsymbol{B(x_B; y_B; z_B)}$ deux points dans un **repère orthonormé**.

La **distance entre** les deux points $\boldsymbol{A}$ **et** $\boldsymbol{B}$, c.-à-d. la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ vaut :

$$\boldsymbol{AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

Il s'ensuit que dans un repère orthonormé, la **norme d'un vecteur** $\boldsymbol{\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$ est égale à :

$$\boldsymbol{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Milieu d'un segment

Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors :

$$\boldsymbol{M = mil([AB]) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)}$$

Remarque

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \boldsymbol{(ABDC)} = \#$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{(ABDC)}$ est un parallélogramme

Exercice 1 :

Soient $A(-3; 2; 1)$, $B(2; -2; 0)$; $C(-1; -1; 4)$ et $D(x_D; y_D; z_D)$ quatre points de l'espace.

1) Déterminer les coordonnées du point D pour que $(ABCD)$ soit un parallélogramme.
2) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$.
3) Calculer la distance entre les points A et B, puis calculer la norme du vecteur $\vec{u}$.

Solution :

1) $(\boldsymbol{ABCD})$ est un parallélogramme

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{\overrightarrow{DC}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - (-3) = -1 - x_D \\ -2 - 2 = -1 - y_D \\ 0 - 1 = 4 - z_D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = -1 - x_D \\ -4 = -1 - y_D \\ -1 = 4 - z_D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -6 \\ y_D = 3 \\ z_D = 5 \end{cases}$$

Donc : $D(-6; 3; 5)$.

2) Notons : $\vec{u}(x; y; z)$.

Alors :

$\vec{u} = \boldsymbol{2}\overrightarrow{AB} - \boldsymbol{3}\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = \boldsymbol{2} \cdot (2 + 3) - \boldsymbol{3} \cdot (-1 - 2) \\ y = \boldsymbol{2} \cdot (-2 - 2) - \boldsymbol{3} \cdot (-1 + 2) \\ z = \boldsymbol{2} \cdot (0 - 1) - \boldsymbol{3} \cdot (4 - 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + 9 \\ y = -8 - 3 \\ z = -2 - 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 19 \\ y = -11 \\ z = -14 \end{cases}$$

Donc : $\vec{u}\begin{pmatrix} 19 \\ -11 \\ -14 \end{pmatrix}$

3) La distance entre les points A et B est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$AB = \|\overrightarrow{AB}\|$

$= \sqrt{(2 - (-3))^2 + (-2 - 2)^2 + (0 - 1)^2}$

$= \sqrt{5^2 + (-4)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{25 + 16 + 1}$

$= \sqrt{42} \approx 6{,}5$

De même :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{19^2 + (-11)^2 + (-14)^2}$

$= \sqrt{361 + 121 + 196}$

$= \sqrt{678} \approx 26$

Colinéarité de deux vecteurs

- Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie que les deux vecteurs ont la même direction.
  Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\boldsymbol{\vec{u} = k \cdot \vec{v}}$
- **Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.**

Exercice 2 :

1) Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\9\\-3\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?
2) Les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}4\\-8\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}-2\\4\\-6\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?
3) Les points $A(-1;-2;-3)$, $B(1;1;1)$ et $C(3;4;5)$ sont-ils alignés ?
4) Les points $E(2;1;3)$, $F(4;-1;5)$ et $G(4;2;-7)$ sont-ils alignés ?

Solution :

1) $\vec{u}\ col.\ \vec{v}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$

$\Leftrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = k \cdot \vec{v}\begin{pmatrix}-6\\9\\-3\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = (k\vec{v})\begin{pmatrix}-6k\\9k\\-3k\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2 = -6k\\-3 = 9k\\1 = -3k\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}k = -\frac{1}{3}\\k = -\frac{1}{3}\\k = -\frac{1}{3}\end{cases}$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et on a :

$\vec{u} = -\frac{1}{3} \cdot \vec{v}$

2) $\vec{a}\ col.\ \vec{b}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$

$\Leftrightarrow \vec{a}\begin{pmatrix}4\\-8\\3\end{pmatrix} = k \cdot \vec{b}\begin{pmatrix}-2\\4\\-6\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \vec{a}\begin{pmatrix}4\\-8\\3\end{pmatrix} = (k\vec{b})\begin{pmatrix}-2k\\4k\\-6k\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4 = -2k\\-8 = 4k\\3 = -6k\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}k = -2\\k = -2\\k = -\frac{1}{2}\end{cases}$ impossible

k ne peut pas prendre deux valeurs différentes en même temps, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

3) A, B et C sont alignés

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = k \cdot \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\6\\8\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = (k\overrightarrow{AC})\begin{pmatrix}4k\\6k\\8k\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2 = 4k\\3 = 6k\\4 = 8k\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}k = \frac{1}{2}\\k = \frac{1}{2}\\k = \frac{1}{2}\end{cases}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et par conséquent les points A, B et C sont alignés. On a :

$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$

4) E, F et G sont alignés

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{EF} = k \cdot \overrightarrow{EG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix} = k \cdot \overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}2\\1\\-10\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix} = (k\overrightarrow{EG})\begin{pmatrix}2k\\k\\-10k\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2 = 2k\\-2 = k\\2 = -10k\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}k = 1\\k = -2\\k = -\frac{1}{5}\end{cases}$ impossible

k ne peut pas prendre trois valeurs différentes en même temps, donc les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne sont pas colinéaires et par conséquent, les points E, F et G ne sont pas alignés.

Remarque

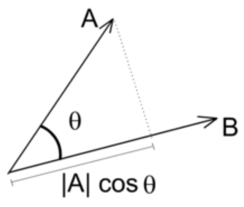
Les points A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.

Orthogonalité de deux vecteurs

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x\prime \\ y\prime \\ z\prime \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans une base orthonormée.

Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et défini par :

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{xx' + yy' + zz'} \\ &= \|\vec{\boldsymbol{u}}\|\cdot\|\vec{\boldsymbol{v}}\|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}}}\right) \end{aligned}$$



Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et trois points O, A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v} = 0}$

$\Leftrightarrow$ **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux** : on note $\boldsymbol{\vec{u}} \perp \boldsymbol{\vec{v}}$

Exercice 3 :

1) Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?
2) Les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

Solution :

1) *D'après ce qui précède :*

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

On a :

$\vec{u}\cdot\vec{v}$

$= 1\cdot 4 + 3\cdot 1 + 1\cdot(-7)$

$= 4 + 3 - 7$

$\stackrel{!}{=} 0$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2) *D'après ce qui précède :*

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

On a :

$\vec{a}\cdot\vec{b}$

$= -1\cdot(-2) + (-3)\cdot 3 + 2\cdot 4$

$= 2 - 9 + 8$

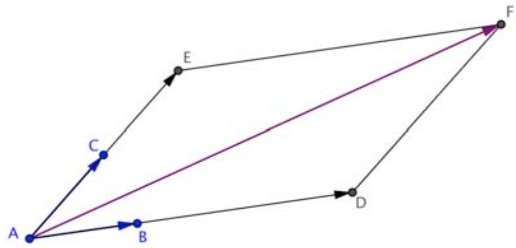
$= 1$

$\neq 0$

Donc les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas orthogonaux.

Combinaison linéaire de deux vecteurs

Soient A, B et C trois points de l'espace et α et β deux réels.
Alors le vecteur $\overrightarrow{AF}$ donné par : $\overrightarrow{AF} = \alpha\cdot\overrightarrow{AB} + \beta\cdot\overrightarrow{AC}$ est une **combinaison linéaire** des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.



Exemple

$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC} \end{cases}$ Comme : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{\boldsymbol{AD}} + \overrightarrow{\boldsymbol{DF}} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, on a : $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

Exercice 4 :

Soient A, B et C trois points quelconques de l'espace. Sachant que $\overrightarrow{RB} = 3\overrightarrow{RC}$, démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AR}$ peut s'exprimer de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Solution :

L'objectif est d'exprimer, à partir de l'égalité vectorielle donnée, le vecteur $\overrightarrow{AR}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On a :

$$\overrightarrow{RB} = 3\overrightarrow{RC}$$

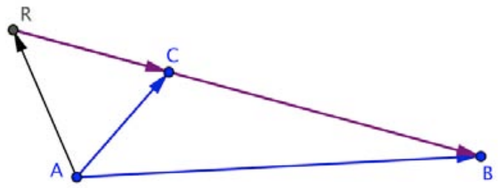
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AB} = 3(\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AC}) \quad \textit{(relation de Chasles)}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{RA} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AR} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$



A retenir

- Une **droite de l'espace** est uniquement déterminée par la donnée de 2 points A et B (ou par un point et un vecteur directeur).
- Un **plan dans l'espace** est uniquement déterminé par la donnée de 3 points A, B et C non alignés (ou par un point et deux vecteurs directeurs non colinéaires).

Propriétés

I. Si A, B et C sont 3 points non alignés de l'espace et si $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, alors M appartient au plan (ABC).

II. Si A, B et C sont 3 points non alignés de l'espace et si M appartient au plan (ABC), alors $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, c.-à-d. :

$$\exists \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{\boldsymbol{AM}} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \boldsymbol{\beta} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

Remarques

- Si $\beta = 0$ alors : $\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ et donc : $M \in (AB)$ *(Le point M appartient à la droite (AB)).*
- Si $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ alors : $\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ et donc : $M = A$

Résumé des propriétés I. et II. :

M appartient au plan $(ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Exercice 5 :

Dans un repère de l'espace, on donne $A(2;-1;2), B(3;-1;3), C(1;2;2)$ et $D(\alpha;5;4)$.

1) Ecrire la condition pour que D soit un point du plan (ABC).
2) Déterminer le réel α pour que cette condition soit remplie.

Solution :

1) $D \in (ABC) \Leftrightarrow \exists k, l \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AD} = k \cdot \overrightarrow{AB} + l \cdot \overrightarrow{AC}$

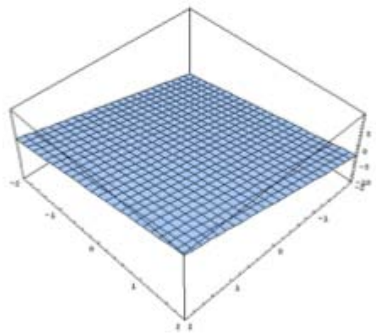
2) On a : $\overrightarrow{AD} = k \cdot \overrightarrow{AB} + l \cdot \overrightarrow{AC}$ avec $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} \alpha - 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2 = k \cdot 1 + l \cdot (-1) \\ 6 = k \cdot 0 + l \cdot 3 \\ 2 = k \cdot 1 + l \cdot 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2 = k \cdot 1 + l \cdot (-1) \\ 6 = k \cdot 0 + l \cdot 3 \\ 2 = k \cdot 1 + l \cdot 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2 = k - l \\ 6 = 3l \\ 2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = k - l + 2 \\ l = 2 \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ l = 2 \\ k = 2 \end{cases}$$

Donc : $D(2;5;4) \in (ABC)$

Plans dans l'espace

Un **plan** *(que l'on désigne souvent par les lettres $\mathcal{P}$ ou π)* est un objet fondamental à deux dimensions. Intuitivement il peut être visualisé comme « planche sans épaisseur » qui s'étend à l'infini et que l'on peut orienter comme on veut dans l'espace.



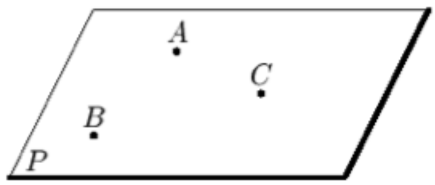
Dans un espace à trois dimensions et avec un système de coordonnées $(x; y; z)$, on peut définir le plan comme l'ensemble des solutions de l'équation : $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$, où a, b, c et d sont des nombres réels et où a, b et c ne sont pas simultanément nuls.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$, tout **plan $\mathcal{P}$** admet une **équation cartésienne** de la forme :

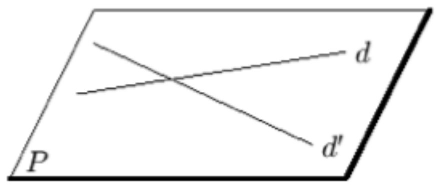
$$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0} \quad \text{avec } (a; b; c) \neq (0; 0; 0)$$

Un plan P peut être déterminé par :

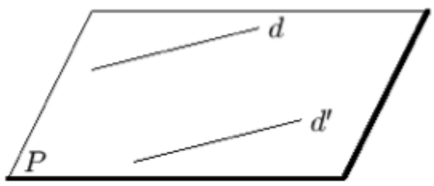
Trois points non alignés



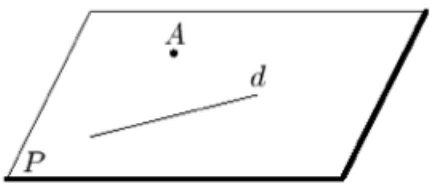
Deux droites sécantes



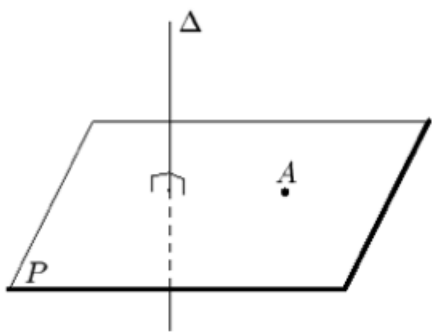
Deux droites parallèles distinctes
(non confondues)



Une droite et un point
n'appartenant pas à cette droite



Un point du plan et une droite orthogonale au plan



*Une droite orthogonale à un plan est aussi appelée **normale** à ce plan.*

Equation vectorielle et système d'équations paramétriques d'un plan

Dans l'espace, les points $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ et $C(x_C; y_C; z_C)$ étant non alignés, le plan (ABC) est l'ensemble (le lieu) des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

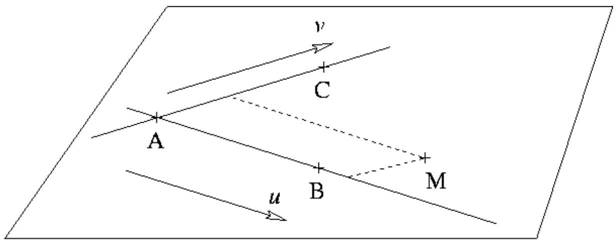
En effet si $\boldsymbol{M(x;y;z) \in (ABC)}$, alors **$\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$**.
L'équation $\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ est une équation vectorielle du plan (ABC).

En remplaçant les coordonnées respectives des quatre points A, B, C et $M(x; y; z)$ dans l'équation vectorielle du plan (ABC) et en égalant les vecteurs obtenus, on arrive au système :

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC} \quad (\alpha; \beta \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = \alpha \cdot (x_B - x_A) + \beta \cdot (x_C - x_A) \\ y - y_A = \alpha \cdot (y_B - y_A) + \beta \cdot (y_C - y_A) \\ z - z_A = \alpha \cdot (z_B - z_A) + \beta \cdot (z_C - z_A) \end{cases}$$

équations paramétriques du plan (ABC)



$\boldsymbol{M(x;y;z) \in (ABC)}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$ **tel que** $\boldsymbol{\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}}$ **équation vectorielle du plan (ABC)**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x - x_A = \alpha \cdot (x_B - x_A) + \beta \cdot (x_C - x_A)} \\ \boldsymbol{y - y_A = \alpha \cdot (y_B - y_A) + \beta \cdot (y_C - y_A)} \\ \boldsymbol{z - z_A = \alpha \cdot (z_B - z_A) + \beta \cdot (z_C - z_A)} \end{cases}$$

équations paramétriques du plan (ABC)

(de paramètres réels α et β)

Exercice 6 :

1) Déterminer un système d'équations paramétriques du plan π passant par les points $A(3; -1; 2)$, $B(6; 6; -5)$ et $C(2; -4; 3)$.
2) On considère le plan π_1 vérifiant les équations paramétriques suivantes :
$$\pi_1 \equiv \begin{cases} x = 5 - k - 2l \\ y = 0 + 2k + l \\ z = 1 + 3k - 4l \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{R})$$
Donner un point et deux vecteurs directeurs du plan π_1.

Solution :

1) *On a :*

$M(x; y; z) \in \pi = (ABC)$

$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = \alpha \cdot 3 + \beta \cdot (-1) \\ y + 1 = \alpha \cdot 7 + \beta \cdot (-3) \\ z - 2 = \alpha \cdot (-7) + \beta \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 3\alpha - \beta \\ y = -1 + 7\alpha - 3\beta \\ z = 2 - 7\alpha + \beta \end{cases}$$

équations paramétriques du plan (ABC)

(π est le plan passant par le point $A(3; -1; 2)$ et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$)

(Un point quelconque du plan (ABC) a pour coordonnées $\left(\underbrace{3 + 3\alpha - \beta}_{x} ; \underbrace{-1 + 7\alpha - 3\beta}_{y} ; \underbrace{2 - 7\alpha + \beta}_{z} \right)$).

2) π_1 est le plan passant par le point $E(5; 0; 1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Equation cartésienne d'un plan

Dans l'espace rapporté à un repère, les coordonnées $(x; y; z)$ d'un point quelconque M d'un plan π vérifient une équation du premier degré de la forme : $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

Cette équation du plan π est appelée équation cartésienne du plan π.

$\boldsymbol{\pi \equiv ax + by + cz + d = 0}$ avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ **équation cartésienne du plan π**

Remarques

- Si $a = b = c = 0$ et $d \neq 0$, alors aucun point M ne vérifie l'équation du plan.
- Si $a = b = c = d = 0$, alors tout point M vérifie l'équation du plan et donc l'ensemble des points M est l'espace tout entier.

Calcul d'un déterminant 3x3

Un déterminant 3x3 est le produit des éléments de la première colonne, multiplié par le déterminant 2x2 obtenu en supprimant cette colonne et la ligne contenant l'élément considéré.
Attention ! Le produit obtenu est précédé d'un **signe qui alterne entre « + » et « − »**.

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & \cancel{b} & \cancel{c} \\ \cancel{d} & e & f \\ \cancel{g} & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cancel{a} & b & c \\ d & \cancel{e} & \cancel{f} \\ \cancel{g} & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cancel{a} & b & c \\ \cancel{d} & e & f \\ g & \cancel{h} & \cancel{i} \end{vmatrix} \\
&= a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\
&= a\,(ei - hf) - d(bi - hc) + g(bf - ec) \\
&= aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi
\end{aligned}
$$

On peut comparer ce tableau de signes à un échiquier, où les « + » seraient les cases blanches et les « − » les cases noires.

Pour calculer un déterminant d'ordre trois, il existe cependant une méthode plus rapide, appelée la « **règle de Sarrus** » *(Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861) – mathématicien français).*
La règle de Sarrus ne marche que pour les déterminants d'ordre trois !

$$
\begin{array}{ccccc}
+ & + & + & & \\
\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} \\
\boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} & \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} \\
- & - & - & &
\end{array}
$$

$$\boldsymbol{= +aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi}$$

Dans l'espace rapporté à un repère, si $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$,

- tout **plan** a une **équation cartésienne** du type : $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$ et
- toute équation du type : $ax + by + cz + d = 0$ est celle d'un plan.

$\boldsymbol{M(x;y;z) \in (ABC)}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\overrightarrow{AM}}$, $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}$ **et** $\boldsymbol{\overrightarrow{AC}}$ **coplanaires** $\Leftrightarrow \mathbf{det}(\boldsymbol{\overrightarrow{AM}};\boldsymbol{\overrightarrow{AB}};\boldsymbol{\overrightarrow{AC}}) = \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \boldsymbol{x-x_A} & \boldsymbol{x_B-x_A} & \boldsymbol{x_C-x_A} \\ \boldsymbol{y-y_A} & \boldsymbol{y_B-y_A} & \boldsymbol{y_C-y_A} \\ \boldsymbol{z-z_A} & \boldsymbol{z_B-z_A} & \boldsymbol{z_C-z_A} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow \dots = \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{ax+by+cz+d=0}$ **équation cartésienne du plan** $\boldsymbol{(ABC)}$	$+ \quad + \quad +$ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$ $- \quad - \quad -$ $= +aei + bfg + cdh$ $-ceg - afh - bdi$

Exercice 7 :

1) Calculer les déterminants suivants *(en utilisant la règle de Sarrus).*

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

2) Déterminer une équation cartésienne du plan π passant par le point $B(1;-2;1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3) Déterminer une équation cartésienne du plan π_1 passant par les points $A(2;3;5)$; $B(1;0;5)$ et $C(6;-2;5)$.

4) Déterminer une équation cartésienne du plan π_2 vérifiant les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 5 - k - 2l \\ y = 0 + 2k + l \\ z = 1 + 3k + 3l \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{R})$$

Solution :

1) a) -70 b) -88 *(voir cours 2ème – ch.6 – Exercice 5 (théorie) p.12)*

2)

Méthode 1 :	***Méthode 2 :***
On commence par **écrire les équations paramétriques du plan π, puis on élimine les deux paramètres réels.** $M(x;y;z) \in \pi$ $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BM} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -\alpha + \beta \\ y+2 = 2\alpha + 2\beta \\ z-1 = 3\alpha - \beta \end{cases} \quad \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{vmatrix}$ Eliminons les paramètres réels α et β : $\begin{cases} -\alpha + \beta = x-1 \\ 2\alpha + 2\beta = y+2 \\ 3\alpha - \beta = z-1 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \to L_2 + 2L_1 \\ L_3 \to L_3 + 3L_1 \end{vmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = x-1 \\ 4\beta = 2x+y \\ 2\beta = 3x+z-4 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \to L_2 - 2L_3 \\ L_3 \end{vmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = x-1 \\ \mathbf{0} = \boldsymbol{-4x+y-2z+8} \\ 2\beta = 3x+z-4 \end{cases}$	Pour trouver une équation cartésienne du plan, on **exprime que les vecteurs $\boldsymbol{\overrightarrow{BM}}, \boldsymbol{\vec{u}}$ et $\boldsymbol{\vec{v}}$ sont coplanaires par : $\mathbf{det}(\boldsymbol{\overrightarrow{BM}};\boldsymbol{\vec{u}};\boldsymbol{\vec{v}}) = \mathbf{0}$.** $M(x;y;z) \in \pi$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BM}, \vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont coplanaires* $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM};\vec{u};\vec{v}) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y+2 & 2 & 2 \\ z-1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-1 & -1 \\ y+2 & 2 \\ z-1 & 3 \end{matrix} = 0$ $\Leftrightarrow -2(x-1) - 2(z-1) + 3(y+2) - 2(z-1)$ $-6(x-1) - 1(y+2) = 0$ $\Leftrightarrow -8(x-1) - 4(z-1) + 2(y+2) = 0 \quad \vert \div (-2)$ $\Leftrightarrow 4(x-1) + 2(z-1) - (y+2) = 0$ $\Leftrightarrow 4x - 4 + 2z - 2 - y - 2 = 0$ $\Leftrightarrow 4x - y + 2z - 8 = 0$

D'où une équation cartésienne du plan π :	D'où une équation cartésienne du plan π :
$\pi \equiv 4x - y + 2z - 8 = 0$	$\pi \equiv 4x - y + 2z - 8 = 0$

Remarque :
Ces deux méthodes s'adaptent au cas d'un plan défini par trois points A; B et C non alignés en remplaçant :
$\vec{u}$ **par** $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ **par** $\overrightarrow{AC}$ *(voir exemple ci-dessous).*

3) $M(x;y;z) \in \pi_1$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont coplanaires*

$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 4 \\ y-3 & -3 & -5 \\ z-5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-2 & -1 \\ y-3 & -3 \\ z-5 & 0 \end{matrix} = 0$

$\Leftrightarrow 0(x-2) + 5(z-5) + 0(y-3) + 12(z-5) + 0(x-2) + 0(y-3) = 0$

$\Leftrightarrow 5(z-5) + 12(z-5) = 0$

$\Leftrightarrow 17(z-5) = 0 \quad |\div 17$

$\Leftrightarrow z - 5 = 0$

D'où une équation cartésienne du plan π_1 :

$\pi_1 \equiv z - 5 = 0$

4)

Méthode 1 :

On élimine les deux paramètres réels k et l.

Eliminons les paramètres réels k et l :

$\begin{cases} x = 5 - k - 2l \\ y = 0 + 2k + l \\ z = 1 + 3k + 3l \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k + 2l = -x + 5 \\ 2k + l = y \\ 3k + 3l = z - 1 \end{cases} \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1 \end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k + 2l = -x + 5 \\ -3l = y + 2x - 10 \\ -3l = z - 1 + 3x - 15 \end{cases} \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \to L_3 - L_2 \end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k + 2l = -x + 5 \\ -3l = y + 2x - 10 \\ \mathbf{0 = z - 1 + 3x - 15 - y - 2x + 10} \end{cases}$

D'où une équation cartésienne du plan π_2 :

$\pi_2 \equiv x - y + z - 6 = 0$

Méthode 2 :

On détermine un point et deux vecteurs directeurs du plan π_2, puis on utilise la méthode du déterminant.

π_2 est le plan passant par $A(5;0;1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$M(x;y;z) \in \pi$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont coplanaires*

$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\ \vec{u}; \vec{v}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-5 & -1 & -2 \\ y & 2 & 1 \\ z-1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-5 & -1 \\ y & 2 \\ z-1 & 3 \end{matrix} = 0$

$\Leftrightarrow 6(x-5) - 1(z-1) - 6y$
$\quad + 4(z-1) - 3(x-5) + 3y = 0$

$\Leftrightarrow 3(x-5) - 3y + 3(z-1) = 0 \quad |\div 3$

$\Leftrightarrow (x-5) - y + (z-1) = 0$

$\Leftrightarrow x - y + z - 6 = 0$

D'où une équation cartésienne du plan π_2 :

$\pi_2 \equiv x - y + z - 6 = 0$

Propriété

Dans l'espace rapporté à un repère, l'équation $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a;b;c) \neq (0;0;0)$ est vérifiée par les coordonnées $(x;y;z)$ de tout point M d'un plan.

En effet :

- Supposons $c \neq 0$

  Si $ax+by+cz+d=0$, on a : $z=-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}y-\frac{d}{c}$

  En posant $x=\alpha$ et $y=\beta$ (avec $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$) les solutions de cette équation sont de la forme :

  $$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -\frac{a}{c}\alpha-\frac{b}{c}\beta-\frac{d}{c} \end{cases} \quad (\alpha,\beta \in \mathbb{R}) \quad \text{équations paramétriques d'un plan } \pi$$

  π est le plan passant par $A\left(0;0;-\frac{d}{c}\right)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{a}{c}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{b}{c}\end{pmatrix}$.

- La démonstration est analogue pour $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Exercice 8 :

1) Déterminer un point et deux vecteurs directeurs du plan $\pi \equiv 2x-y+3z-5=0$.
2) Déterminer un système d'équations paramétriques du plan $\pi_1 \equiv 5x-3y+2z-7=0$

Solution :

1) **Pour trouver un point du plan donné par une équation cartésienne, il suffit de se donner au choix deux parmi les trois coordonnées, de les remplacer dans l'équation et d'en déduire la troisième coordonnée.**

   Le plan π a pour équation cartésienne *:* $\pi \equiv 2x-y+3z-5=0$

   Pour *:* $x=0$ *et* $y=0 \Rightarrow 3z-5=0 \Leftrightarrow z=\frac{5}{3}$ donc *:* $A\left(0;0;\frac{5}{3}\right) \in \pi$

   $x=0$ *et* $z=0 \Rightarrow -y-5=0 \Leftrightarrow y=-5$ donc *:* $B(0;-5;0) \in \pi$

   $y=0$ *et* $z=0 \Rightarrow 2x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$ donc *:* $C\left(\frac{5}{2};0;0\right) \in \pi$

   D'où deux vecteurs directeurs : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-5\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\0\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$

2) **Pour déterminer des équations paramétriques d'un plan dont on donne une équation cartésienne, on détermine la coordonnée d'un point quelconque du plan.**

   Le plan π_1 a pour équation cartésienne *:* $\pi_1 \equiv 5x-3y+2z-7=0$

   En posant $x=\alpha$ et $y=\beta$ avec $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, on obtient :

   $5\alpha-3\beta+2z-7=0 \Leftrightarrow z=\frac{7-5\alpha+3\beta}{2}$

   Un système d'équations paramétriques du plan π_2 est donc donné par :

   $$\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=\frac{7-5\alpha+3\beta}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\alpha+\frac{3}{2}\beta \end{cases}$$

   Remarque :

   π_1 est le plan passant par $A\left(0;0;\frac{7}{2}\right)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ (ou bien *:* $\vec{u'}\begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v'}\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$).

Exercice 9 :

On donne le plan $\pi \equiv 2x+2y+2z-1=0$.

Donner trois points non alignés (à vérifier) de ce plan.

Déterminer un système d'équations paramétriques de π.

Solution :

Grâce à la méthode appliquée à l'exercice 8 (*1)*), on peut dire que le plan π passe par les points :
$A\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$, $B(0;\frac{1}{2};0)$ et $C\left(\frac{1}{2};0;0\right)$.

D'où les deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Pour vérifier si les points A, B et C sont alignés, on établit le système d'équations paramétriques :

$$\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{1}{2}k \\ \frac{1}{2} = 0 \qquad \text{système impossible !} \\ -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}k \end{cases}$$

Par conséquent il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.

Il s'ensuit que les trois points ne sont pas alignés et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires peuvent jouer le rôle de vecteurs directeurs du plan π.

Equations paramétriques du plan π :

$$M(x;y;z) \in \pi = (ABC) \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\beta \\ y = \frac{1}{2}\alpha \\ z = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Remarque

On aurait également pu commencer par établir un système d'équations paramétriques du plan π, en posant $x = \alpha$ et $y = \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (voir Exercice 8 (*2)*)). On obtient alors : $2\alpha + 2\beta + 2z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} - \alpha - \beta$

Un système d'équations paramétriques du plan π_2 est donc donné par :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \frac{1}{2} - \alpha - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \frac{1}{2} - \alpha - \beta \end{cases}$$

Ensuite pour déterminer les coordonnées de trois points du plan π, on donne des valeurs arbitraires à α et β.

Par exemple si $\alpha = \beta = 0$, on a : $A\left(0;0;\frac{1}{2}\right) \in \pi$.

si $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{2}$, on a : $B(0;\frac{1}{2};0) \in \pi$.

si $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, on a : $B\left(1;1;-\frac{3}{2}\right) \in \pi$.

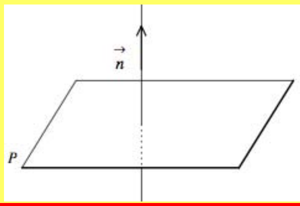
Vecteur normal à un plan

Un **vecteur normal $\vec{n}$** à un plan $\mathcal{P}$ est un vecteur *non nul* orthogonal à tous les vecteurs de ce plan $\mathcal{P}$.
Le plan d'équation cartésienne

$$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$$

avec $(a;b;c) \neq (0;0;0)$ admet le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal avec :

$$\boldsymbol{\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}}$$



A l'aide d'un **vecteur normal**, on peut donc **établir une équation du plan passant par trois points $\boldsymbol{A, B}$ et $\boldsymbol{C}$ donnés.** Pour cela :

- On cherche un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- Le plan admet alors une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
  Pour déterminer d, on exprime le fait que les coordonnées du point A doivent vérifier l'équation du plan.

Exercice 10 :

Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(2; 1; 3)$ dont un vecteur normal est $\vec{n}(1; 1; 2)$.

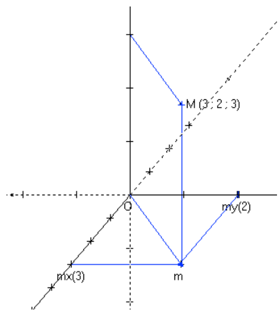
Solution :

Méthode 1 :	***Méthode 2 :***
$M(x; y; z) \in \mathcal{P}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ $\Leftrightarrow 1 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y-1) + 2 \cdot (z-3) = 0$ $\Leftrightarrow x - 2 + y - 1 + 2z - 6 = 0$ $\Leftrightarrow x + y + 2z - 9 = 0$ D'où une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$: $\mathcal{P} \equiv x + y + 2z - 9 = 0$	On sait le plan $\mathcal{P}$ admet comme équation cartésienne : $\mathcal{P} \equiv ax + by + cz + d = 0$ avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ Comme $\vec{n}(1; 1; 2)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, on a : $\mathcal{P} \equiv x + y + 2z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$. De plus : $A(2; 1; 3) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 2 + 1 + 2 \cdot 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -9$ D'où une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$: $\mathcal{P} \equiv x + y + 2z - 9 = 0$

Droites dans l'espace

Equation vectorielle et système d'équations paramétriques d'une droite

L'équation vectorielle ainsi que les équations paramétriques des droites dans l'espace sont les mêmes que dans le plan, sauf qu'il y a une coordonnée en plus – la cote : z.

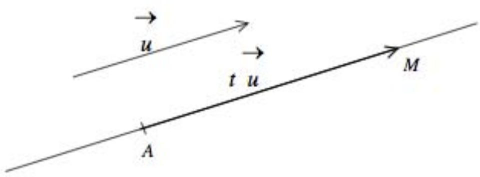


Dans l'espace, les points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ étant distincts, la droite (AB) (également noté AB) est l'ensemble (le lieu) des points M tels que : $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

En effet si $\boldsymbol{M(x; y; z) \in (AB)}$, alors **les points $\boldsymbol{A, B}$ et $\boldsymbol{M}$ sont alignés**, donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AM}}$ **est colinéaire à** $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}$.
L'équation $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ avec $k \in \mathbb{R}$ est une équation vectorielle de la droite (AB).

En remplaçant les coordonnées respectives des trois points A, B et $M(x; y; z)$ dans l'équation vectorielle de la droite (AB) et en égalant les deux vecteurs obtenus, on arrive au système :

$$\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad (k \in \mathbb{R})$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = k \cdot (x_B - x_A) \\ y - y_A = k \cdot (y_B - y_A) \\ z - z_A = k \cdot (z_B - z_A) \end{cases}$$



équations paramétriques de la droite (AB) (k est le paramètre réel)

$\boldsymbol{M(x; y; z) \in (AB)}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\exists k \in \mathbb{R}}$ **tel que** $\boldsymbol{\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB}}$ **équation vectorielle de la droite $\boldsymbol{(AB)}$**

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\begin{cases} x - x_A = k \cdot (x_B - x_A) \\ y - y_A = k \cdot (y_B - y_A) \\ z - z_A = k \cdot (z_B - z_A) \end{cases}}$ **équations paramétriques de la droite $\boldsymbol{(AB)}$**

Exercice 11 :

1) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite d passant par $A(1;2;-3)$ et $B(2;1;2)$.

2) La droite d dont une représentation graphique est $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t+2 \\ z = 0t-1 \end{cases}$ est la droite passant par le point

   $A(\_\_\_;\_\_\_;\_\_\_)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$.

3) Une droite d est définie par un point $A(2;4;5)$ et un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   a) Déterminer un système d'équations paramétriques de d.

   b) Vérifier si le point $P(7;-1;3)$ appartient à la droite d.

4) Soit le point $A(2;0;-3)$. Ecrire une représentation paramétrique des droites suivantes :

   a) d_1 passant par A et $B(1;4;5)$

   b) d_2 passant par A et parallèle à la droite $g \equiv \begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = 3\lambda + 0 \\ z = 5\lambda + 2 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

5) Montrer que les systèmes d'équations suivants déterminent la même droite :

$$d_1 \equiv \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = 5-2\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad\qquad d_2 \equiv \begin{cases} x = 7-4\mu \\ y = 1+4\mu \\ z = 3-2\mu \end{cases} \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

Solution :

1) $M(x;y;z) \in d = (AB)$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = k\cdot 1 \\ y-2 = k\cdot(-1) \\ z+3 = k\cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+k \\ y = 2-k \\ z = -3+5k \end{cases}$ équations paramétriques de la droite d

(d est la droite passant par le point $A(1;2;-3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$)

(Un point quelconque de la droite (AB) a pour coordonnées $(1+k;2-k;-3+5k)$).

2) d est la droite passant par le point $A(1;2;-1)$ *(prendre $t=0$)* et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3) $M(x;y;z) \in d$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = k\cdot 1 \\ y-4 = k\cdot 4 \\ z-5 = k\cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+k \\ y = 4+4k \\ z = 5+2k \end{cases}$ équations paramétriques de la droite d

$P(7;-1;3) \in d$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} 7 = 2+k \\ -1 = 4+4k \\ 3 = 5+2k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 5 \\ k = -\frac{5}{4} \\ k = -1 \end{cases}$ impossible *(car k ne peut pas prendre trois valeur différentes en même temps)* donc : $P(7;-1;3) \notin d$

4) $M(x;y;z) \in d_1 = (AB)$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = k\cdot(-1) \\ y = k\cdot 4 \\ z+3 = k\cdot 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-k \\ y = 4k \\ z = -3+8k \end{cases}$ équations paramétriques de la droite d_1

g est la droite passant par le point $E(-1;0;2)$ *(prendre $\lambda = 0$)* et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$.

La droite d_2 étant parallèle à la droite g, elle admet également le vecteur $\vec{u}$ comme vecteur directeur et on a donc :

$M(x;y;z) \in d_2 = (A;\vec{u})$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = k\cdot 2 \\ y = k\cdot 3 \\ z+3 = k\cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+2k \\ y = 3k \\ z = -3+5k \end{cases}$ équations paramétriques de la droite d_2

5) d_1 est la droite passant par $A(3;5;1)$ *(prendre $\lambda = 0$)* et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

d_2 est la droite passant par $B(7;1;3)$ *(prendre $\mu = 0$)* et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix}$.

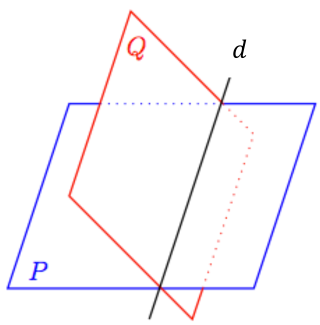
On constate que $\vec{v} = -2\vec{u}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires et par conséquent les droites $d_1$et d_2 sont parallèles.
Reste à montrer que les droites d_1 et d_2 sont confondues.
Pour cela, il suffit de vérifier que le point $A \in d_2$ *(ou bien que $B \in d_1$)*. On a :

$A(3;5;1) \in d_2 \Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} 3 = 7-4\mu \\ 5 = 1+4\mu \\ 1 = 3-2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ \mu = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$ Donc : $A \in d_2$

Les droites d_1 et d_2 sont confondues et on a : $d_1 = d_2$.
On constate que le système d'équations paramétriques d'une droite donnée n'est pas unique.
En effet **chaque droite de l'espace admet une infinité de représentations paramétriques**.

Système d'équations cartésiennes d'une droite

Chaque droite d de l'espace est obtenue comme intersection de deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.



Soient $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

les équations cartésiennes de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ respectivement.

Alors le système d'équations :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

est un **système d'équations cartésiennes de la droite d**.

Remarque

Il n'existe pas d'équation cartésienne d'une droite dans l'espace.

Dans l'espace rapporté à un repère, si $(a_1;b_1;c_1) \neq (0;0;0)$ et si $(a_2;b_2;c_2) \neq (0;0;0)$, alors

- toute **droite** d a pour **système d'équations cartésiennes** : $\boldsymbol{d} \equiv \begin{cases} \boldsymbol{a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0} \\ \boldsymbol{a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0} \end{cases}$
- et un tel système d'équations cartésiennes est celui d'une droite.

Exercice 12 :

1) Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point $A(2;2;0)$ qui admet comme vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$.

2) Soit la droite d donnée par un système d'équations cartésiennes : $d \equiv \begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 2y + 3z = -3 \end{cases}$
Déterminer un vecteur directeur de cette droite.

3) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite d définie par :
$d \equiv \begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ x - y + z - 6 = 0 \end{cases}$

Solution :

1)

Equations paramétriques de la droite d :

$M(x;y;z) \in d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = k & (1) \\ y - 2 = -2k & (2) \\ z = 4k & (3) \end{cases}$

Pour trouver un système d'**équations cartésiennes de la droite d**, il suffit d'**éliminer le paramètre réel k**.

(1) dans (2) : $\quad y - 2 = -2 \cdot (x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad 2x + y - 6 = 0$

(1) dans (3) : $\quad z = 4 \cdot (x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad 4x - z - 8 = 0$

D'où le système d'équations cartésiennes cherché :

$d \equiv \begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ 4x - z - 8 = 0 \end{cases}$ système d'équations cartésiennes de d

Remarque

En remplaçant (2) dans (3), on obtient le système équivalent : $d \equiv \begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$.

2)

Méthode 1

Pour déterminer un vecteur directeur de cette droite, il suffit de déterminer deux points quelconques de cette droite.

- Posons : $\quad z = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 6 & (1) \\ 2x + 2y = -3 & (2) \end{cases}$

  $(1) + (2)$: $\quad 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

  dans (2) : $\quad 2 + 2y = -3 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2} \qquad$ donc : $A\left(1; -\frac{5}{2}; 0\right) \in d$

- Posons : $\quad y = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x + 3z = 6 & (1) \\ 2x + 3z = -3 & (2) \end{cases}$

  $(2) - (1)$: $\quad x = -9$

  dans (2) : $\quad -18 + 3z = -3 \Leftrightarrow z = 5 \qquad$ donc : $B(-9;0;5) \in d$

D'où un vecteur directeur cherché : $\quad \vec{u} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-10\\\frac{5}{2}\\5\end{pmatrix}$

Méthode 2

Le système représenté est un système simplement indéterminé car il s'agit de 2 équations à 3 inconnues.

Si intersection il y a, les deux plans se coupent suivant une droite *(sauf si les deux plans sont confondus).*

Introduisons donc un paramètre, p.ex. : $y = \beta$ $(\beta \in \mathbb{R})$ *– pour éviter les fractions –* **et formons les équations paramétriques de la droite d de paramètre β. Pour cela, il suffit d'exprimer x et z en fonction de β.**

$$d \equiv \begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 2y + 3z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \beta \\ x - 2\beta + 3z = 6 \\ 2x + 2\beta + 3z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \beta \\ x + 3z = 6 + 2\beta \\ 2x + 3z = -3 - 2\beta \end{cases} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \to L_2 - L_3 \\ L_3 \to L_3 - 2L_2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \beta \\ -x = 9 + 4\beta \\ -3z = -15 - 6\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 - 4\beta \\ y = \quad\quad \beta \\ z = 5 \ + 2\beta \end{cases} \quad \text{système d'équations paramétriques de } d$$

Interprétation géométrique :

Il s'agit de deux plans qui se coupent suivant la droite d qui passe par le point $A(-9; 0; 5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3)

Pour déterminer des équations paramétriques d'une droite dont on donne des équations cartésiennes, on détermine la coordonnée d'un point quelconque de la droite.

Posons par exemple $x = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On obtient alors :

$$d \equiv \begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ x - y + z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ 2\alpha + 3y - z - 4 = 0 \\ \alpha - y + z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ 3y - z = -2\alpha + 4 \\ -y + z = -\alpha + 6 \end{cases} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \to L_2 + L_3 \\ L_3 \to 2L_3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ 2y = -3\alpha + 10 \\ -2y + 2z = -2\alpha + 12 \end{cases} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \to L_3 + L_2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ 2y = -3\alpha + 10 \\ 2z = -5\alpha + 22 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\frac{3}{2}\alpha + 5 \\ z = -\frac{5}{2}\alpha + 11 \end{cases} \quad \text{système d'équations paramétriques de } d$$

Interprétation géométrique :

Il s'agit de deux plans qui se coupent suivant la droite d qui passe par le point $A(0; 5; 11)$ (prendre $\alpha = 0$) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$ (ou bien $\vec{u'}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$).

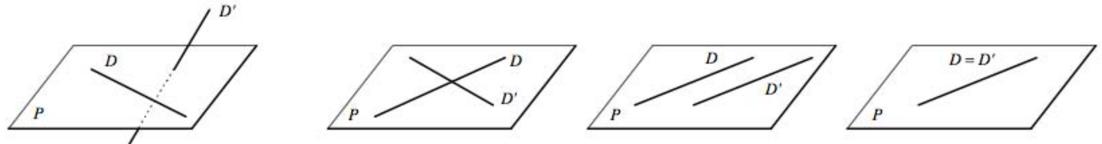
Problèmes d'intersection

Position relative de deux droites

Soient deux droites D et D' de l'espace dont les représentations paramétriques sont :

$$D: \begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D': \begin{cases} x = a't' + x_B \\ y = b't' + y_B \\ z = c't' + z_B \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

Il y a <u>4 cas possibles</u> :



D et D' sont non coplanaires — D et D' sont sécantes — D et D' sont strictement parallèles — D et D' sont confondues

D et D' sont coplanaires

Dans le plan, il n'a y que deux éventualités : deux droites sont sécantes ou parallèles.
Dans l'espace, deux droites peuvent aussi être **gauches**, c.-à-d. n'avoir aucun point en commun et un plan passant par ces deux droites n'existe pas. Les deux droites sont donc non coplanaires.

L'étude de l'intersection des droites D et D' se fait en déterminant, si elles existent, les solutions du système (d'inconnues t et t') suivant :

$$\begin{cases} at + x_A = a't' + x_B \\ bt + y_A = b't' + y_B \\ ct + z_A = c't' + z_B \end{cases}$$

Exercice 13 :

On donne : $A(1;1;0)$, $B(0;1;1)$, $C(3;2;0)$ et $D(2;3;3)$.
Etudier l'intersection des droites (AB) et (CD).

Solution :

Méthode 1

Système d'équations paramétriques de la droite (AB) : $(AB) \equiv \begin{cases} x = -k+1 \\ y = \quad\quad 1 \\ z = k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

Système d'équations paramétriques de la droite (CD) : $(CD) \equiv \begin{cases} x = -t+3 \\ y = t+2 \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$I(x;y;z) \in (AB) \cap (CD)$

$\Leftrightarrow \exists k,t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} -k+1 = -t+3 \\ 1 = t+2 \\ k = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -k+1 = -t+3 \\ t = -1 \\ k = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(-3)+1 = -(-1)+3 \\ t = -1 \\ k = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \overset{!}{=} 4 \\ t = -1 \\ k = -3 \end{cases}$

Si $k = -3$, on obtient (en remplaçant dans les équations paramétriques de la droite (AB)): $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases}$

(ou bien remplacer t par (-1) dans les équations paramétriques de la droite (CD)).

Donc : $(AB) \cap (CD) = \{I\}$ avec $I(4;1;-3)$

Méthode 2

Etablir un système d'équations paramétriques de l'une des deux droites et un système d'équations cartésiennes de l'autre droite. Remplacer ensuite les équations paramétriques de l'une dans les équations cartésiennes de l'autre.

$(AB) \equiv \begin{cases} x = -k+1 \\ y = \quad\quad 1 \\ z = k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ système d'équations cartésiennes de la droite (AB)

$(CD) \equiv \begin{cases} x = -t+3 \\ y = t+2 \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ système d'équations paramétriques de la droite (CD)

$I(x;y;z) \in (AB) \cap (CD)$

$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} (-t+3) + 3t - 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

En remplaçant t par (-1) dans les équations paramétriques de la droite (CD), on obtient : $\begin{cases} x = 4 \\ y \overset{!}{=} 1 \\ z = -3 \end{cases}$.

Donc : $(AB) \cap (CD) = \{I\}$, avec $I(4;1;-3)$.

Exercice 14 :

Déterminer l'intersection des deux droites d et d' définies par :

$$d \equiv \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = -2\alpha - 3 \\ z = 3\alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad d' \equiv \begin{cases} x = 3\beta - 1 \\ y = -\beta - 4 \\ z = \beta + 2 \end{cases} \quad (\beta \in \mathbb{R})$$

équations paramétriques de la droite d — équations paramétriques de la droite d'

Solution :

On transforme les équations paramétriques de l'une des droites en système d'équations cartésiennes pour pouvoir appliquer la méthode 2 de l'exercice 13. Pour cela il faut éliminer le paramètre dans un des deux systèmes d'équations.

$$d \equiv \begin{cases} x = \alpha + 1 & L_1 \to L_1 \\ y = -2\alpha - 3 & L_2 \to L_2 + 2L_1 \\ z = 3\alpha & L_3 \to L_3 - 3L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ \mathbf{2x + y = -1} \\ \mathbf{-3x + z = -3} \end{cases}$$

Système d'équations cartésiennes de la droite d : $d \equiv \begin{cases} 2x + y \qquad = -1 \\ -3x \qquad + z = -3 \end{cases}$

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites d et d', on remplace les équations paramétriques de la droite d' dans les équations cartésiennes de la droite d.

d' dans d : $\begin{cases} 2 \cdot (3\beta - 1) + (-\beta - 4) = -1 \\ -3 \cdot (3\beta - 1) + (\beta + 2) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$ (le système admet donc une solution)

En remplaçant $\beta = 1$ dans les équations paramétriques de la droite d', on obtient : $\begin{cases} x = 3 - 1 \\ y = -1 - 4 \\ z = 1 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ z = 3 \end{cases}$

Donc : $d \cap d' = \{I\}$, avec $I(2; -5; 3)$.

Exercice 15 :

Déterminer l'intersection des droites d et d' définies par :

$$d \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y + z = 6 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad d' \equiv \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

équations cartésiennes de la droite d — équations cartésiennes de la droite d'

Solution :

Pour déterminer l'intersection éventuelle, il faut résoudre le système : $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1 \end{array} \to_1 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \\ L_4 \to L_4 \end{array} \to_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 - L_2 \\ L_2 \to L_2 \\ L_3 \to L_3 + 2L_2 \\ L_4 \to L_4 + 4L_2 \end{array}$$

$$\to_3 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -3 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 \to L_2 \\ L_3 \to \frac{1}{7}L_3 \\ L_4 \to L_4 \end{array} \to_4 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -3 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 14 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 + 3L_3 \\ L_2 \to L_2 - 3L_3 \\ L_3 \to L_3 \\ L_4 \to L_4 - 14L_3 \end{array} \to_5 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -3 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{32}{7} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

L'équation auxiliaire $(0x + 0y + 0z = -5)$ étant impossible, le système n'admet pas de solution.

Les droites d et d' ne se coupent pas et donc : $d \cap d' = \emptyset$

Remarque

Comme un vecteur directeur de la droite d est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de la droite d' est $\vec{v}\begin{pmatrix} -13 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, les droites d et d' ne sont pas parallèles (car leurs vecteurs directeurs respectifs ne sont pas colinéaires).
On dit que **les droites d et d' sont gauches**.

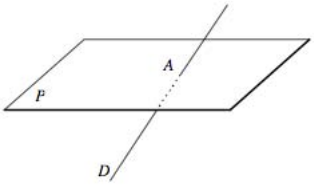
Alternative : On aurait également pu commencer par établir un système d'équations paramétriques de l'une des deux droites, puis appliquer à nouveau la méthode 2 de l'exercice 13, c.-à-d. remplacer ces équations paramétriques dans les équations cartésiennes de l'autre droite.

Position relative d'une droite et d'un plan

Soit un plan $\mathcal{P}$ d'équation : $ax + by + cz + d = 0$

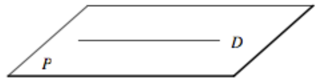
Et une droite D représentée par : $\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Il y a <u>3 cas possibles</u> :



D et $\mathcal{P}$ sont sécants en A

D et $\mathcal{P}$ sont parallèles et D n'est pas incluse dans $\mathcal{P}$



D est incluse dans $\mathcal{P}$

<u>Exercice 16 :</u>

Déterminer l'intersection de la droite d et du plan π donnés respectivement par :

$d \equiv \begin{cases} x - 3 = 2k \\ y + 2 = k \\ z - 1 = -k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$ et $\pi \equiv 3x - y + z - 1 = 0$

équations paramétriques de la droite d — équation cartésienne du plan π

<u>Solution :</u>

d est la droite passant par $A(3; -2; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées d'un point commun éventuel doivent vérifier les équations de d et de π.

$d \equiv \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = -2 + k \\ z = 1 - k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$ dans π : $3(3 + 2k) - (-2 + k) + (1 - k) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4k + 11 = 0$

$\Leftrightarrow k = -\frac{11}{4}$

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite d et du plan π, il suffit de remplacer k par la valeur trouvée dans les équations paramétriques de la droite d :

$$d : \begin{cases} x = 3 + 2 \cdot \left(-\frac{11}{4}\right) \\ y = -2 + \left(-\frac{11}{4}\right) \\ z = 1 - \left(-\frac{11}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = -\frac{19}{4} \\ z = \frac{15}{4} \end{cases}$$

Donc : $d \cap \pi = \{I\}$, avec $I\left(-\frac{5}{2}; -\frac{19}{4}; \frac{15}{4}\right)$ *(point de percée)*

Remarque

On appelle **point de percée**, l'unique point d'intersection d'une droite et d'un plan (la droite perce le plan).

<u>Exercice 17 :</u>

Déterminer l'intersection de la droite d et du plan π définis par :

$d \equiv \begin{cases} x + y = 5 \\ -y - 3z = 1 \end{cases}$ et $\pi \equiv \begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = -2\alpha - \beta - 1 \\ z = \alpha - \beta - 2 \end{cases} \quad (\alpha; \beta \in \mathbb{R})$

équations cartésiennes de la droite d — équations paramétriques du plan π

Solution :

π est le plan passant par $A(0;-1;-2)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Les coordonnées d'un point commun éventuel doivent vérifier les équations de d et de π.

$$\pi \equiv \begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = -2\alpha - \beta - 1 \\ z = \alpha - \beta - 2 \end{cases} (\alpha;\beta \in \mathbb{R}) \quad \text{dans} \quad d : \begin{cases} (-\alpha+\beta) + (-2\alpha-\beta-1) = 5 \\ -(-2\alpha-\beta-1) - 3(\alpha-\beta-2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha = 6 \\ -\alpha + 4\beta = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

En remplaçant $\alpha = -2$ et $\beta = -2$ dans les équations paramétriques du plan π, on obtient : $\begin{cases} x = 2-2 \\ y = 4+2-1 \\ z = -2+2-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \\ z = -2 \end{cases}$

Donc : $d \cap \pi = \{I\}$, avec $I(0;5;-2)$ *(point de percée)*

Exercice 18 :

Déterminer l'intersection de la droite d et du plan π définis par :

$$d \equiv \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 2z = -3 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \pi \equiv x + y + z = 0$$

équations cartésiennes de la droite d — équation cartésienne du plan π

Solution :

Pour déterminer l'intersection éventuelle, il faut résoudre le système : $(S) \equiv \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 2z = -3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{array} \to_1 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 \to -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \to L_3 \end{array} \to_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 - 2L_2 \\ L_2 \to L_2 \\ L_3 \to L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\to_3 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

L'équation auxiliaire $(0x + 0y + 0z = 0)$ étant vérifiée, le système est simplement indéterminé (une variable libre : z) et s'écrit :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = -3 \\ y - z = 3 \\ z \text{ est libre} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 2z \\ y = 3 + z \\ z \text{ est libre} \end{cases}$$

Remarque

On retrouve un système d'équations cartésiennes de la droite d. En effet :

$$\begin{cases} x = -3 - 2z \\ y = 3 + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = -3 \\ z = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = -3 \\ x + 2(y-3) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = -3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

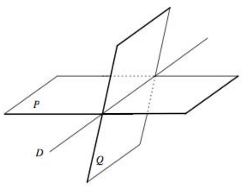
En posant : $z = \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$, le système (S) s'écrit :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 2\gamma \\ y = 3 + \gamma \\ z = \gamma \end{cases} \quad (\gamma \in \mathbb{R})$$

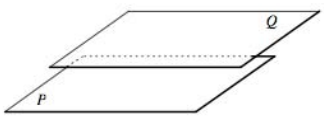
Donc : $d \cap \pi = d$, droite passant par $A(-3;3;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$.

Position relative de deux plans

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux plans. Il y a <u>3 cas possibles</u> *(voir chapitre 3 – systèmes linéaires)* :



Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants suivant une droite D.



Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles non confondues, dit strictement parallèles.

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont confondues.