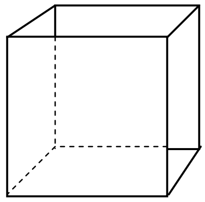
Somme et différence de deux cubes

- La notion de cube



Le premier cube que les enfants rencontrent est le dé.
Le cube est une figure de l'espace qui a trois dimensions. L'unité de volume est le cm^3 ou m^3. Le 3 à l'exposant nous rappelle ces 3 dimensions.

- Somme de 2 cubes

On a vu qu'en général: $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$. En est-il pareil pour le cube? $(a+b)^3 \overset{?}{\neq} a^3+b^3$
Afin de pouvoir vérifier, nous allons d'abord contrôler sur deux exemples et démontrer le résultat ensuite de manière générale.

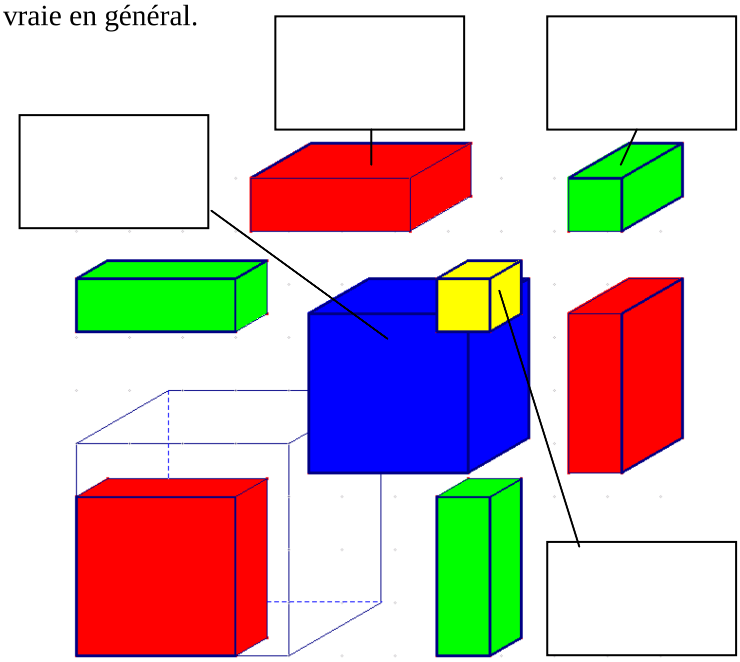
Ex: 1) $a=0$ et $b=1$ $(a+b)^3=(0+1)^3=1$ et
$a^3+b^3=0^3+1^3=1$ mais

2) $a=2$ et $b=3$ $(a+b)^3=(2+3)^3=5^3=125$ et
$a^3+b^3=2^3+3^3=8+27=35$

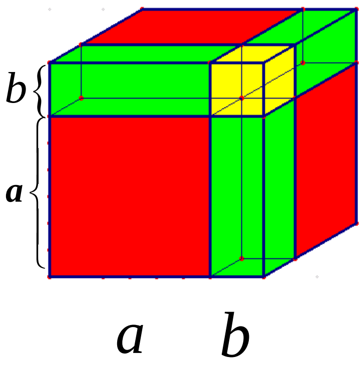
Donc, cette relation n'est pas vraie en général.

  - Formule de développement

Découverte graphique:



$(a+b)^3=$



Démonstration:

$\forall a\in\mathbb{R},\ \forall b\in\mathbb{R}$, on a :

$$(a+b)^3 \underset{\text{par définition}}{=} (a+b)^2\cdot(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$$

$$= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3$$

$$\underbrace{(a+b)^3}_{\text{cube d'un binôme}} = \underbrace{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}_{\text{quadrinôme cube parfait}}$$

- Formule de factorisation de la somme de 2 cubes

  Pour établir cette formule, nous utilisons la formule de développement:

$$\begin{aligned} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 &= (a+b)^3 \\ a^3+b^3 &= (a+b)^3-(3a^2b+3ab^2) \\ &= (a+b)^3-3ab(a+b) \\ &= (a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right] \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2-3ab) \end{aligned}$$

$$\boxed{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

- Différence de 2 cubes

  Le procédé de démonstration pour la formule de factorisation de la différence de 2 cubes est absolument similaire.

  - Formule de développement

    $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (a-b)^3 &\underset{\text{par définition}}{=} (a-b)^2 \cdot (a-b) = (a^2-2ab+b^2)(a-b) \\ &= a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+ab^2-b^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\underbrace{(a-b)^3}_{\text{cube d'un binôme}} = \underbrace{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}_{\text{quadrinôme cube parfait}}}$$

  - Formule de factorisation de la différence de 2 cubes

    Pour établir cette formule, nous utilisons la formule de développement:

$$\begin{aligned} a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 &= (a-b)^3 \\ a^3-b^3 &= (a-b)^3-(-3a^2b+3ab^2) \\ &= (a-b)^3+3ab(a-b) \\ &= (a-b)\left[(a-b)^2+3ab\right] \\ &= (a-b)(a^2-2ab+b^2+3ab) \end{aligned}$$

$$\boxed{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

- Résumé de ces formules de factorisation:

$$\boxed{\begin{aligned} a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2) \\ a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) \end{aligned}}$$

- Exercices spécifiques à la somme et différence de deux cubes

Factoriser les expressions suivantes:

1) $x^3 - 8$

2) $64x^3 - 343$

3) $27x^3y^6 - 125y^9$

- Les formules de factorisation des quadrinômes cubes parfaits s'obtiennent à l'aide de la méthode par groupement:

$$\begin{aligned} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 &= \left(a^3+b^3\right)+\left(3a^2b+3ab^2\right) \\ &= (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)+3ab(a+b) \\ &= (a+b)\left(a^2-ab+b^2+3ab\right) \\ &= (a+b)\left(a^2+2ab+b^2\right) \\ &= (a+b)(a+b)^2 \\ &= (a+b)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 &= \left(a^3-b^3\right)-\left(3a^2b-3ab^2\right) \\ &= (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)-3ab(a-b) \\ &= (a-b)\left(a^2+ab+b^2-3ab\right) \\ &= (a-b)\left(a^2-2ab+b^2\right) \\ &= (a-b)(a-b)^2 \\ &= (a-b)^3 \end{aligned}$$

Exercices de développement

Effectuer, en utilisant, si possible, les identités remarquables

$$A = (x+3)^2 - (x+2)(x-2) - 3(2x+3)$$
$$B = (a+b-c)(a-b+c) + (b+c)^2 - a^2$$
$$C = (2x^2+x-1)(2x^2-x+1) + (x-3)(x+1) - 4(x+1)(x-1)(x^2+1)$$
$$D = (x+y)^3 - y(x-y)(x+y) + x(x-y)^2$$
$$E = (x^2-3x)^2 - (x^2+1)^2 + 3x(2x-1)(x-2) + 6x^2$$
$$F = (3x-1)^3 + x(x+1)^2$$
$$G = (x-1)^3 - 2x(x-1)^2 + (x-1)(x+1)(x-2)$$
$$H = (a+1)(a-1)(1+a^2)(a^4-1)$$
$$I = \left[(1+x)^3 + (1+x)^2 y + (1+x)y^2 + y^3\right] - \left[3x(x+1) + y(y+1) + 2xy + 1\right]$$
$$J = (x^2-ax)^3 - (x^2+ax)^3$$
$$K = 61xy + 5x(9x+8y) - 3(3x-2y)(5x+8y) - 2(-3x-4y)^2$$
$$L = (a-b)(a+b) - b^2(-9a^2+4) - (-2b+3ab)^2 - (b^2-a^2)(1-a)$$

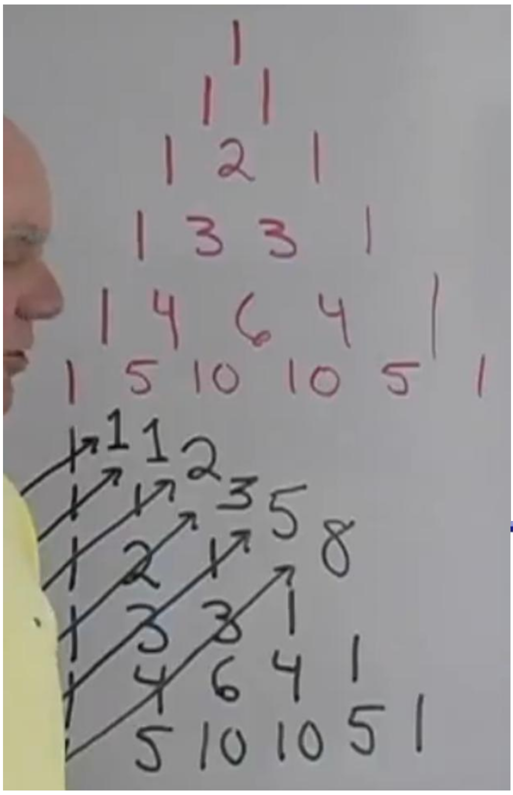
Exercices de factorisation

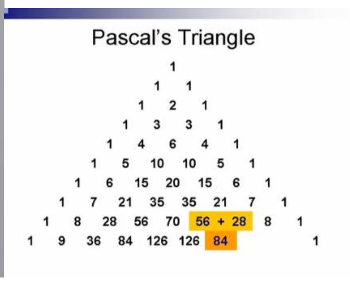
Factoriser les expressions suivantes

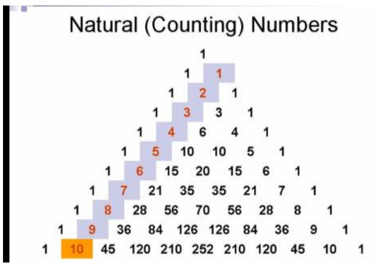
$$A = (2x-3)(5x-1) - (2x-3)(x+1)$$
$$B = (x-3)(8x+2) - (2x-6)(x-5)$$
$$C = (x-8)(4x-1) + x^2 - 8x$$
$$D = -2x^4 - 28x^3 - 98x^2$$
$$E = x^2 - 9 - (4x+5)(x-3)$$
$$F = 16x^2 - 9 + (4x+3)(x-1)$$
$$G = 1 - 4x^2 + (2x-1)^2$$
$$H = (3x+1)^2 + 9x^2 - 1$$
$$I = 8x^3y^3 + 1$$
$$J = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y$$
$$K = a^2 - y^2 - 2xy - x^2$$
$$L = a^4 - 2a^3 + a - 2$$
$$M = x^8 - 4x^6 - 2x^5 + 8x^3 + x^2 - 4$$
$$N = (7x-5)(x-3) - 10(3-x) + x^2 - 9$$
$$O = a^2 - b^2 + (a+b)^2 - (a+b)(2a-b) - b - a$$
$$P = 64(2-3y)^2 - 100(2y-3)^2$$
$$Q = x^9 - 8x^6 - x^3 + 8$$

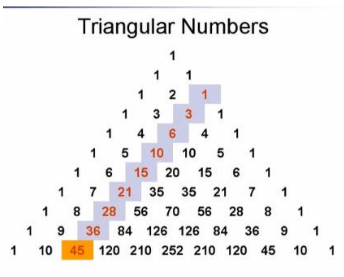
Pour aller plus loin : Développement d'une puissance entière d'un binôme

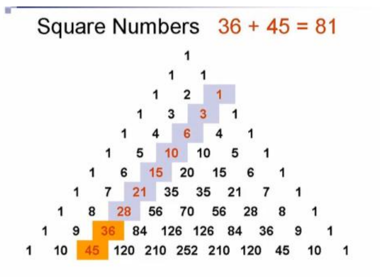
Pour développer une puissance entière quelconque d'un binôme, on se sert du triangle de Pascal, si on ne veut pas démontrer toutes les formules à la main.

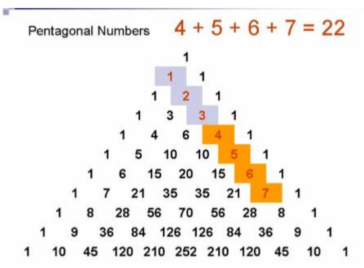


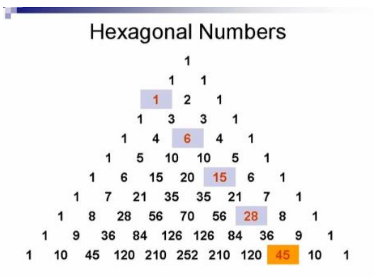


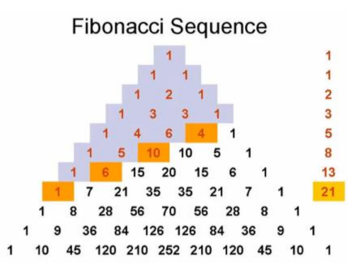


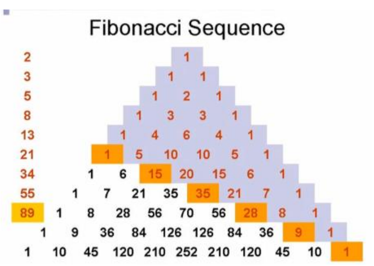


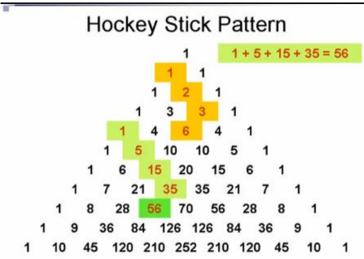


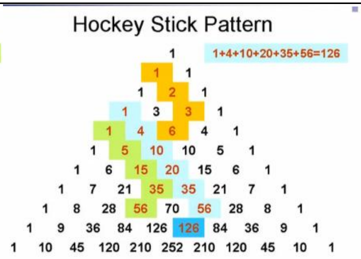


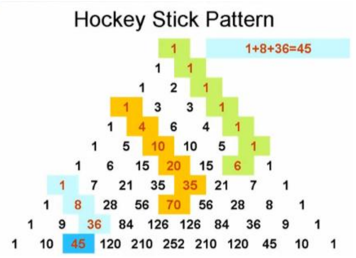


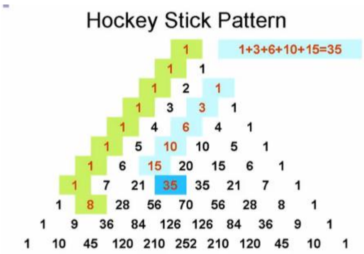


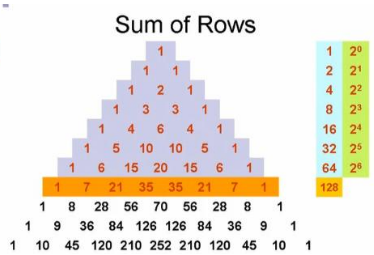


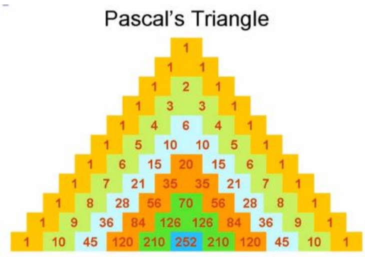












http://www.youtube.com/watch?v=YUqHdxxdbyM&NR=1