Sommaire

Trigonométrie sur le cercle trigonométrique

Propriété: Tout point du cercle trigonométrique détermine un seul angle orienté et tout angle orienté détermine un seul point du cercle trigonométrique:

$M \in \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow$ M *détermine le seul angle orienté XOM*

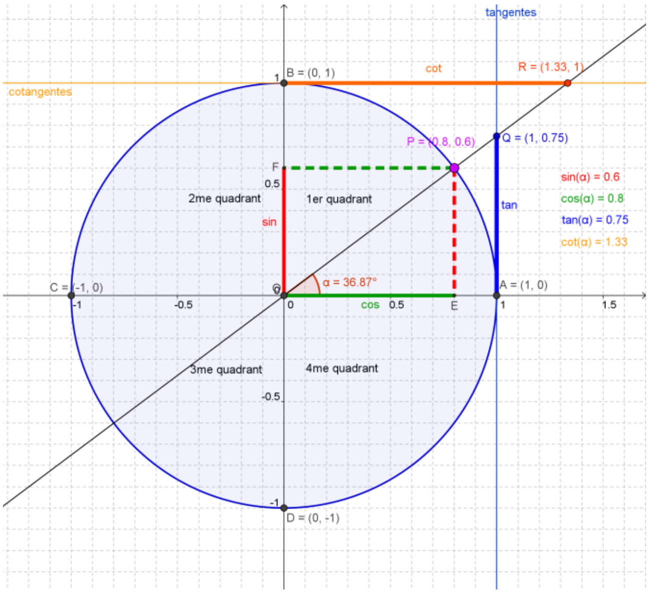
Définition: Dans un repère orthonormé du plan, si le point M est l'unique point du cercle trigonométrique déterminé par l'angle orienté x, alors:

- $\cos x$ est l'abscisse du point M
- $\sin x$ est l'ordonnée du point M
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, si $\cos x \neq 0$ et $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, si $\sin x \neq 0$

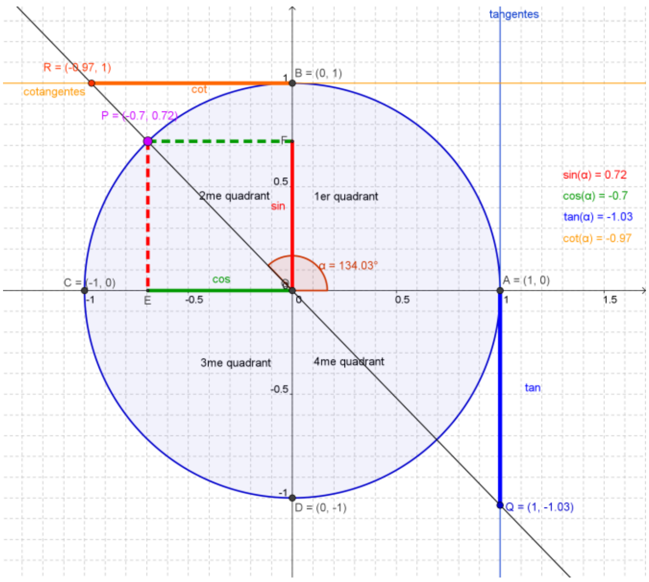
Par conséquent: Le point M du cercle trigonométrique est le point $M(\cos x, \sin x)$

Etude des signes des fonctions sinus, cosinus et tangente

x est un angle du premier quadrant



x est un angle du deuxième quadrant

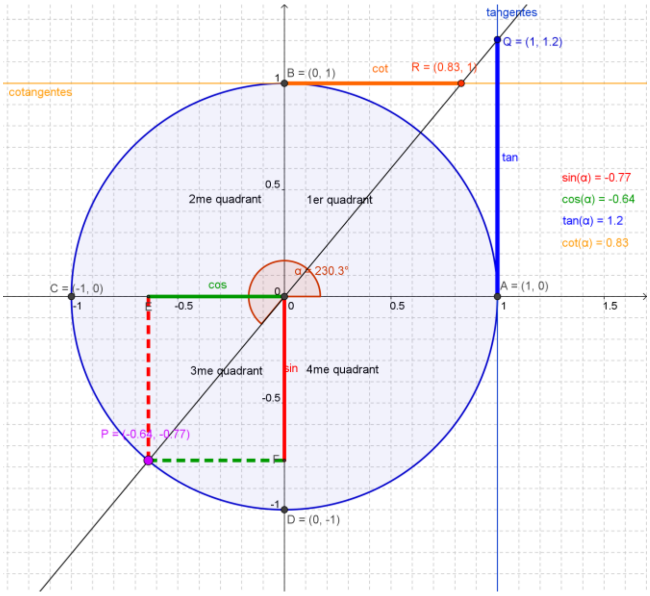


On constate:

x	sin x	cos x	tan x	cot x
0	0	1	0	∞
$0 < x < \frac{\pi}{2}$	+	+	+	+

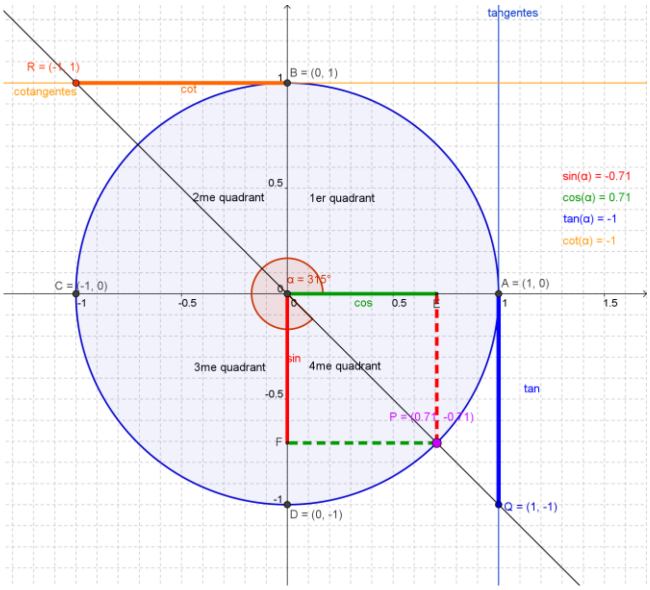
x	sin x	cos x	tan x	cot x
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	+	–	–	–

x est un angle du troisième quadrant



x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
π	0	-1	0	∞
$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$-$	$-$	$+$	$+$

x est un angle du quatrième quadrant



x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞	0
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	$-$	$+$	$-$	$-$

Propriétés

1. Tout angle orienté a un cosinus et un sinus.
   Seuls l'angle droit positif et l'angle droit négatif n'ont pas de tangente.
   Seuls l'angle nul et l'angle plat n'ont pas de cotangente.

2. Quel que soit l'angle orienté x,
   $$-1 \leq \cos x \leq 1$$
   $$-1 \leq \sin x \leq 1$$
   $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ *Relation fondamentale de la trigonométrie*

Autres formules de trigonométrie

- Sous l'hypothèse des formules connues: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ avec $\cos x \neq 0$ et $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, établir une formule directe de calcul de la valeur de $\sin^2 x$ en fonction de $\tan^2 x$.

Résolution:

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \quad \Leftrightarrow \quad (1 - \sin^2 x)\tan^2 x = \sin^2 x$$

$$\tan^2 x - \sin^2 x \cdot \tan^2 x = \sin^2 x$$

$$\tan^2 x = \sin^2 x \cdot (1 + \tan^2 x)$$

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}} \text{ avec } \cos x \neq 0$$

- Sous l'hypothèse des formules connues: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ avec $\cos x \neq 0$ et $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, établir une formule directe de calcul de la valeur de $\cos^2 x$ en fonction de $\tan^2 x$.

  Résolution:

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x \cdot \tan^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x \cdot \tan^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x \cdot (1 + \tan^2 x) = 1$$

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}} \text{ avec } \cos x \neq 0$$

<u>Exercice</u> : Calculez la valeur exacte de A, B et C

$$A = \frac{5\sin x - 2\cos x}{3\cos x + 4\sin x} \qquad \text{avec} \qquad \tan x = \frac{3}{4}$$

$$B = \frac{3\cos x - 4\sin x}{5\sin x + 2\cos x} \qquad \text{avec} \qquad \cot x = \frac{7}{3}$$

$$C = \frac{2\sin^2 x - 3\cos^2 x}{4\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 5\cos^2 x} \qquad \text{avec} \qquad \cot x = -\frac{2}{5}$$

<u>Exercices du livre</u>: 64, 65, 66 p. 245/246 et 106, 107, 108 p. 253

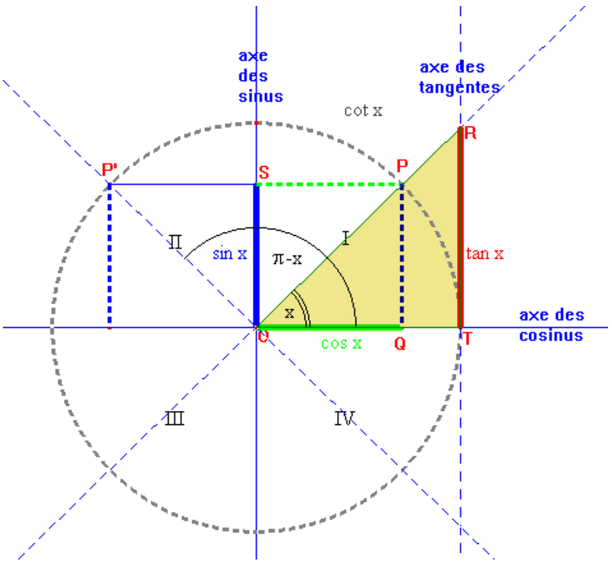
Formules de changement de quadrants

Définitions

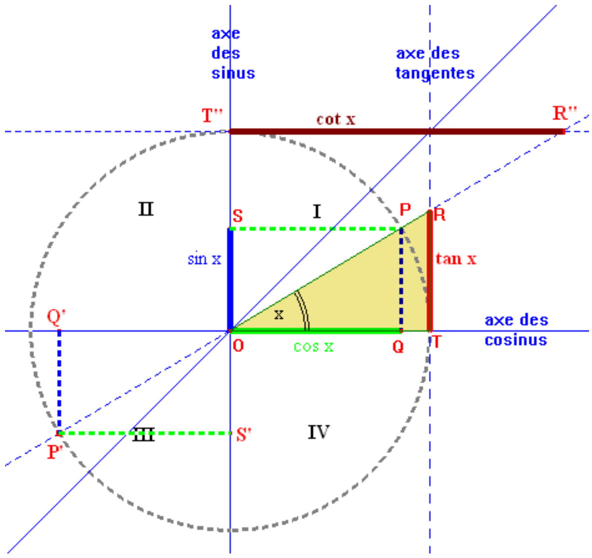
Deux angles α et β sont <u>supplémentaires</u> ssi $\alpha+\beta=\pi \Leftrightarrow \beta=\pi-\alpha$
Deux angles α et β sont <u>anti-supplémentaires</u> ssi $\beta-\alpha=\pi \Leftrightarrow \beta=\pi+\alpha$
Deux angles α et β sont <u>opposés</u> ssi $\alpha+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=-\alpha$
Deux angles α et β sont <u>complémentaires</u> ssi $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$
Deux angles α et β sont <u>anti-complémentaires</u> ssi $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$

Pour établir des formules de transformation, nous utilisons les définitions ci-dessus en vue d'obtenir les valeurs des nombres trigonométriques dans les différents quadrants. On suppose en premier lieu que l'angle de référence α soit un angle du premier quadrant. On ramène tous les angles à cet angle α, car on y connaît les valeurs remarquables au premier quadrant.

Angles supplémentaires



Angles anti-supplémentaires

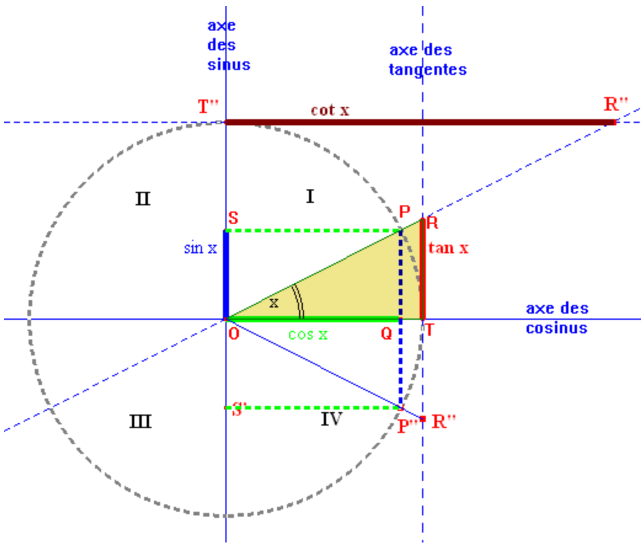


Nous constatons :

$\forall\alpha:\ \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\forall\alpha:\ \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$
$\forall\alpha:\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\forall\alpha:\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$
$\forall\alpha\neq\frac{\pi}{2}:\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	$\forall\alpha\neq\frac{\pi}{2}:\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$

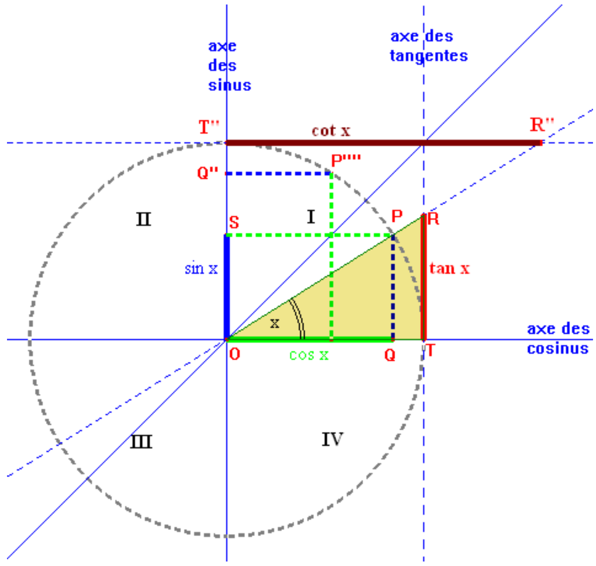
Angles opposés

Passage du IV au I quadrant



Angles complémentaires

Passage du I au I quadrant

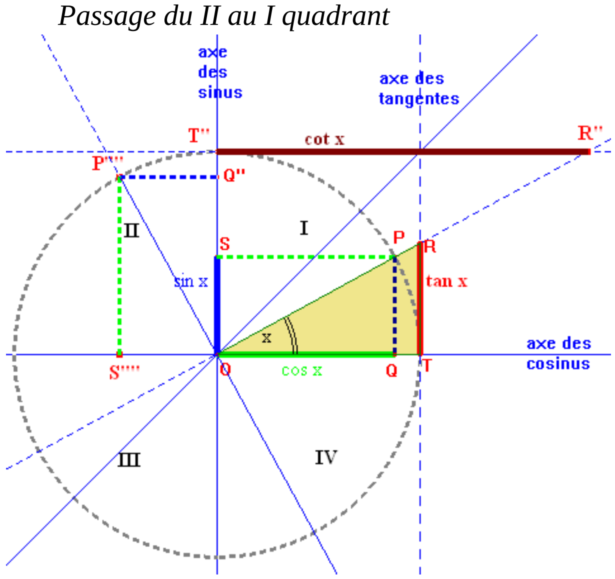


Nous constatons :

$\forall\alpha:\quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\forall\alpha:\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$
$\forall\alpha:\quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\forall\alpha:\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$
$\forall\alpha \neq \frac{\pi}{2}: \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\forall\alpha \neq 0: \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$

Angles anti-complémentaires

Passage du II au I quadrant



Angles supérieurs à 2π

Retour au premier tour de cercle

$$\forall\alpha:\quad \sin(2\pi+\alpha) = \sin\alpha$$
$$\forall\alpha:\quad \cos(2\pi+\alpha) = \cos\alpha$$
$$\forall\alpha \neq \frac{\pi}{2}: \tan(2\pi+\alpha) = \tan\alpha$$

Ces résultats sont faciles à imaginer

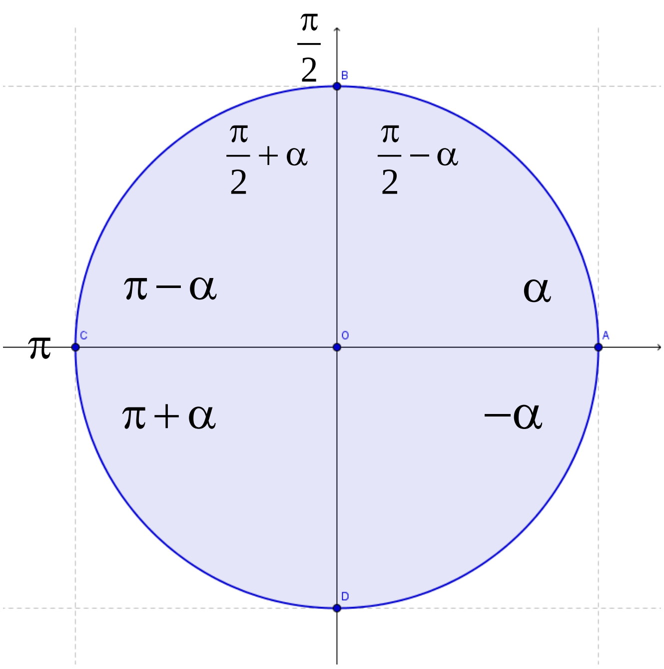
On constate pour les angles anti-complémentaires :

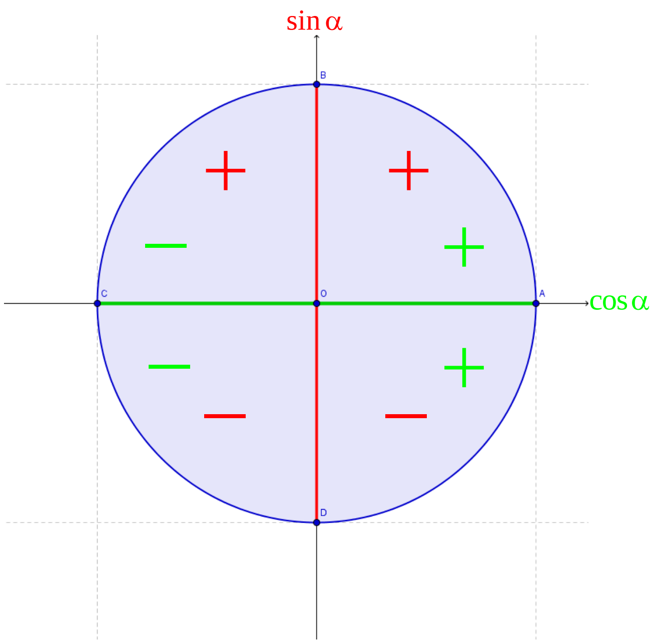
$$\forall\alpha:\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\forall\alpha:\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$$
$$\forall\alpha \neq 0: \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$$

<u>Remarques</u> :

1) Ces formules peuvent également être généralisées à un angle α quelconque, n'appartenant pas nécessairement au premier quadrant, sous la condition d'existence de la tangente.
2) On peut constater que tant qu'il n'y pas de $\frac{\pi}{2}$ dans l'expression du départ, on garde toujours la même fonction. Par contre, dès que le $\frac{\pi}{2}$ apparaît, les fonctions se trouvent changées.
3) Dans toutes ces formules, les signes établis plus tôt sont respectés.

B6 Résumés





B7 Exercices d'entraînement

B7.1

Exercices d'application de ces formules

Exercice 1 : Simplifiez

1) $\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\alpha}$

2) $\tan(\pi-\alpha)\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$

3) $\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin(\pi-\alpha)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(\pi-\alpha)}$

4) $\dfrac{\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(\pi-\alpha)}{\sin\alpha}$

Exercice 2 : Démontrez

1) $\sin 35° = \cos 55°$

2) $\sin 126° = \sin 54°$

3) $\cos(77°+\alpha) = -\cos(103°-\alpha)$

4) $\tan(35°+\alpha)\cdot\tan(55°-\alpha) = 1$

5) $\sin^2 36° + \sin^2 54° = 1$

6) $\dfrac{\sin 34°}{\tan 56°} + \cos 34° = \dfrac{1}{\sin 56°}$

Exercice 3 : Calculez les valeurs exactes des expressions A, B C et D

$A = \sin\dfrac{\pi}{3} + \tan\dfrac{\pi}{6} - \cos\dfrac{\pi}{4}$

$B = \sin\dfrac{5\pi}{6} - \cos\dfrac{3\pi}{4} + \sin\dfrac{3\pi}{4}$

$C = \sin^2\dfrac{7\pi}{6} + \cos^2\dfrac{\pi}{4} - \tan^2\dfrac{11\pi}{4}$

$D = \dfrac{\sin\dfrac{13\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{6}}{\tan\dfrac{2\pi}{3}} + \dfrac{\sin\dfrac{5\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{14\pi}{3}}{\cos\dfrac{5\pi}{4}}$

Exercices du livre : 68, 69, 70 p. 246 et 88, 89 p. 250

Résolution de quelques exercices du livre

219

1) $\sin\frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\tan\frac{2\pi}{3} = \tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

3) $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

5) $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{3}+2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6) $\sin\frac{7\pi}{4} = \sin\left(\frac{7\pi}{4}-2\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

7) $\tan\frac{7\pi}{6} = \tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) = +\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

8) $\sin\frac{3\pi}{2} = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$

9) $\cos\frac{9\pi}{2} = \sin\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

10) $\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

11) $\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{-\tan\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

12) $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(2\pi-\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

13) $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ voir 12)

14) $\cot 3\pi = \cot(2\pi+\pi) = \cot\pi = \frac{1}{\tan\pi} = \infty$

15) $\tan\frac{7\pi}{4} = \tan\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

16) $\cos\frac{13\pi}{6} = \cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

220

1) $\sin 225^\circ = \sin(180^\circ+45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\tan 120^\circ = \tan(180^\circ-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

4) $\sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $\cos 135^\circ = \cos(180^\circ-45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

6) $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ-30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

7) $\tan 240^\circ = \tan(180^\circ+60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

8) $\cos(-300^\circ) = \cos(360^\circ-300^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

9) $\tan(-45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$

10) $\cos 300^\circ = \cos(300^\circ - 360^\circ) = \cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

11) $\tan 210^\circ = \tan(180^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

12) $\sin(-240^\circ) = \sin(360^\circ - 240^\circ) = \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ)$

$= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

13) $\cot(-150^\circ) = \cot(180^\circ - 150^\circ) = \cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$

14) $\tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$

15) $\tan 300^\circ = \tan(300^\circ - 360^\circ) = \tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

16) $\sin 330^\circ = \sin(330^\circ - 360^\circ) = \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

70. **a) 1)** $$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(-\alpha)} \overset{(C)}{\underset{(O)}{=}} \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha.$$

2) $$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} \overset{(S)}{=} \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = -1.$$

b) 1) $$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\pi+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)\tan(\alpha+\pi)} = \frac{\overset{(C)}{\cos\alpha}\,(\overset{(A)}{-\cos\alpha})}{(\underset{(S)}{-\cos\alpha})\underset{(A)}{\tan\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}.$$

2) $$\frac{\sin(\alpha+\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\tan(\pi-\alpha)\cos(-\alpha)} = \frac{(\overset{(A)}{-\sin\alpha})\left[\overset{(S)}{-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\right]}{(\underset{(S)}{-\tan\alpha})\underset{(O)}{\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha(\overset{(C)}{-\sin\alpha})}{\sin\alpha} = -\sin\alpha.$$

3) $$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\overset{(O)}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}}{\underset{(A)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}} = \frac{\overset{(C)}{-\cos\alpha}}{\underset{(C)}{\cot\alpha}} = -\sin\alpha.$$

4) $$\frac{\tan\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\overset{(A)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\underset{(S)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)} = 1.$$

c) 1) $$\frac{\overset{(C)}{\cos a}\tan(45^\circ+a)}{\underset{(O)}{\cos a}\,\underset{(A)}{\tan(45^\circ+a)}} = 1.$$

2) $$\frac{(\overset{(O)}{-\sin a})\,\overset{(S)}{\sin(90^\circ-a)}\,\overset{(O)}{\cos a}}{(\underset{(A)}{-\cos a})\,[\underset{(A)}{-\cos(90^\circ-a)}]} = \frac{-\sin a\,\overset{(C)}{\cos a}\,\cos a}{(-\cos a)\,(\underset{(C)}{-\sin a})} = -\cos a.$$

3) $$\frac{\overset{(S)}{\sin a}}{\underset{(C)}{\sin a}} + \frac{\overset{(S)}{\sin(90^\circ-a)}}{\underset{(O)}{-\sin(90^\circ-a)}} = 1-1 = 0.$$

4) $$\frac{\overset{(O)}{-\tan(90^\circ-a)}}{\underset{(S)}{-\tan a}} - \frac{\overset{(S)}{\sin a}}{\underset{(A)}{-\sin(90^\circ-a)}} = \frac{\overset{(C)}{-\cot a}}{-\tan a} + \tan a = \cot^2 a + \tan a.$$

Exercice 106

3) $\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$M_1 = \sin\alpha\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \sin\alpha\left(\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \sin\alpha - \cos\alpha.$$

(formule) (mise au même dénominateur) (simplification)

$$M_2 = \cos\alpha\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 1\right) = \cos\alpha\left(\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha}\right) = \sin\alpha - \cos\alpha.$$

(formule) (mise au même dénominateur) (simplification)

Donc, $M_1 = M_2$.

4) $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$M_1 = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\sin\alpha + 1}{\cos\alpha}\right)^2 = \frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha} = \frac{(1+\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}$$

(mise au même dénominateur) (form.fond.)

$$= \frac{(1+\sin\alpha)^2}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)} = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = M_2.$$

(factorisation de $a^2 - b^2$) (simplification)

$\boxed{2^e \text{ série}}$

1) $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$M_1 = \sin^2\alpha\left(1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right) = \sin^2\alpha\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 = M_2.$$

(formule) (mise au même dénominateur) (simplification)

2) $\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$M_1 = \sin^2\alpha\left(\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right) - \cos^2\alpha\left(\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)$$ (formules et mise au même dénominateur)

$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 0 = M_2.$$ (simplification)

3) $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$M_1 = \frac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$ (formule et mise au même dénominateur)

$$= \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2 + \sin^2\alpha}$$ (quotient de deux fractions et simplification)

$$= \sin^2\alpha = M_2.$$ (form. fond.)

4) $\alpha, \beta \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\tan\beta \neq \cot\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \tan\beta \neq \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$M_1 = \frac{\tan\alpha - \dfrac{1}{\tan\beta}}{\tan\beta - \dfrac{1}{\tan\alpha}} = \frac{\dfrac{\tan\alpha\tan\beta - 1}{\tan\beta}}{\dfrac{\tan\alpha\tan\beta - 1}{\tan\alpha}}$$ (formules et mise au même dénominateur)

$$= \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$$ (quotient de deux fractions et simplification)

$$= \tan\alpha\cot\beta = M_2.$$ (formule)

107. **1)** $a \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$M_1 = \sin a\left(\frac{\cos a + \sin a}{\cos a}\right) + \cos a\left(\frac{\sin a + \cos a}{\sin a}\right) = (\sin a + \cos a)\left(\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\cos a}{\sin a}\right)$$

(mise en évidence)

$$= (\sin a + \cos a)\frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\cos a \sin a} = \frac{\sin a + \cos a}{\sin a \cos a} = \frac{1}{\cos a} + \frac{1}{\sin a} = M_2.$$

(mise au même dénominateur) (form. fond.) (division d'une somme par sin a cos a et simplification)

2) $a \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$M_1 = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} + 2 = \frac{\sin^4 a + \cos^4 a + 2\sin^2 a\cos^2 a}{\sin^2 a\cos^2 a}$$

(formules) (mise au même dénominateur)

$$= \frac{(\sin^2 a + \cos^2 a)^2}{\sin^2 a\cos^2 a}$$ (factorisation d'un trinôme carré parfait)

$$= \frac{1}{\sin^2 a\cos^2 a} = M_2.$$ (form. fond.)

3) $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\cos a \neq \pm\sin a \Leftrightarrow a \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

$$M_2 = \frac{\frac{\cos a}{\sin a}}{\frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin^2 a}} = \frac{\frac{\cos a}{\sin a}\cdot\sin^2 a}{\cos^2 a - \sin^2 a}$$

(formules) (quotient de deux fractions)

$$= \frac{\cos a\sin a}{\cos^2 a - \sin^2 a} = M_1.$$

(simplification)

4) $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$M_2 = \frac{\cos a}{1 - \sin a}$$

(mult. N et D par 1 + sin a et effectuer $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$)

$$= \frac{\cos a(1 + \sin a)}{1 - \sin^2 a}$$

$$= \frac{\cos a(1 + \sin a)}{\cos^2 a} = \frac{1 + \sin a}{\cos a} = M_2.$$

(form. fond.) (simplification)

5) pas de CE.

$M_1 = \sin^2 a(1 - \sin^2 b) - (1 - \sin^2 a)\sin^2 b$ (form. fond.)

$= \sin^2 a - \sin^2 a\sin^2 b - \sin^2 b + \sin^2 a\sin^2 b$ (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$

$= \sin^2 a - \sin^2 b = M_2.$ (réduction)

6) $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$M_1 = \left(\frac{1 + \sin a}{\cos a}\right)^2$$ (formule et mise au même dénominateur)

$$= \frac{(1 + \sin a)^2}{\cos^2 a}$$ (élévation d'une fraction au carré)

$$= \frac{(1 + \sin a)^2}{1 - \sin^2 a}$$ (form. fond.)

$$= \frac{(1 + \sin a)^2}{(1 + \sin a)(1 - \sin a)}$$ (factorisation de $a^2 - b^2$)

$$= \frac{1 + \sin a}{1 - \sin a} = M_2$$ (simplification)

7) pas de CE.

$M_1 = \sin^4 a + \cos^4 a + \underline{2\sin^2 a\cos^2 a} - \underline{2\sin^2 a\cos^2 a}$ (artifice de calcul)

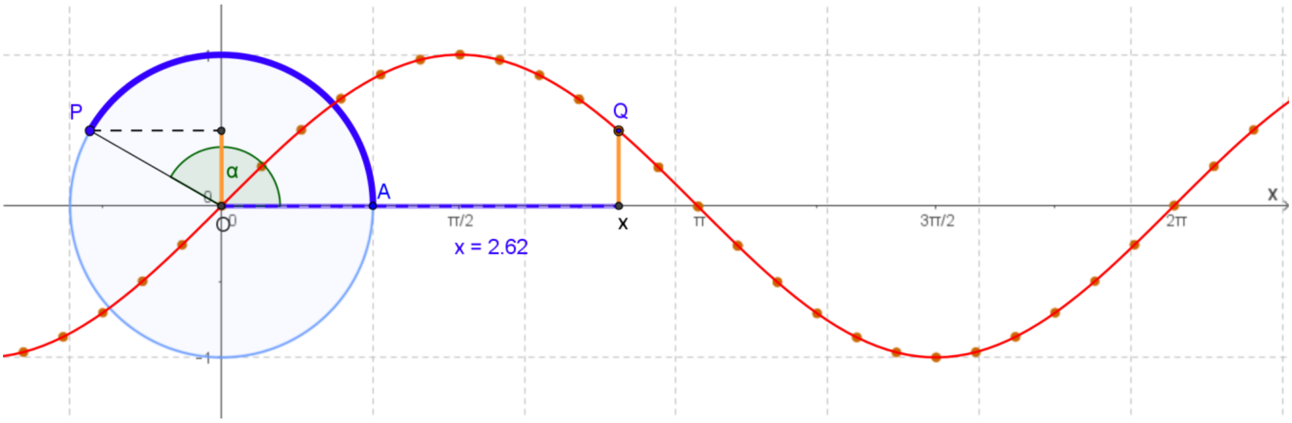
$= (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 2\sin^2 a\cos^2 a$ (factorisation d'un trinôme carré parfait)

$= 1 - 2\sin^2 a\cos^2 a = M_2.$ (form. fond.)

C Le passage des valeurs trigonométriques aux fonctions trigonométriques

C1 Les déroulements du cercle

C11 La fonction sinus



C2 Les différents effets du changement des coefficients
- C21 Le déphasage
- C22 Le changement de période
- C23 Le changement de l'amplitude

C3 La fonction sinus et les fonctions polynômes de degrés croissants