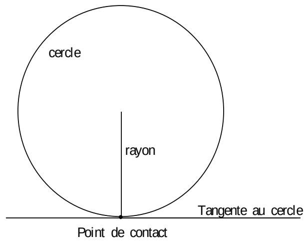
Trigonométrie dans un triangle quelconque

E.1 Cercles et angles

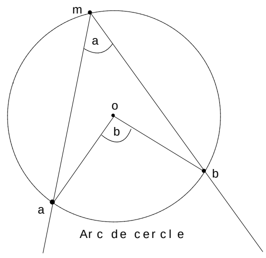


Préliminaires:

> On appelle tangente à un cercle, la droite perpendiculaire au rayon en un point de ce cercle.

Ce point du cercle est appelé point de contact.

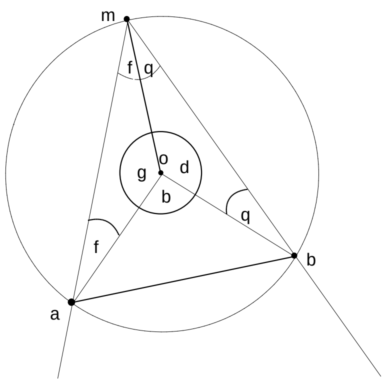
Définitions:



- a, m, b étant trois points d'un cercle de centre o, l'angle formé par les demi-droites $[ma)$ et $[mb)$ est dit angle inscrit dans le cercle (α);
- l'angle formé par les demi-droites $[oa)$ et $[ob)$ est l'angle au centre interceptant le même arc de cercle (β).

Théorème 1:

> La mesure d'un angle au centre est le double de la mesure de tout angle inscrit qui intercepte le même arc.



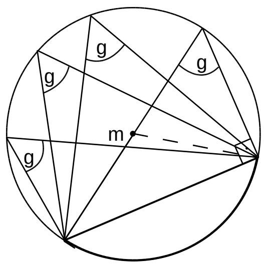
Démonstration:

En traçant le rayon $[mo]$, nous décomposons l'angle α en deux angles ϕ et θ tels que: $\alpha = \phi + \theta$
Comme les triangles (mao) et (mob) sont isocèles $(mo = ao = bo = R)$, ils sont également isogones.

Il s'ensuit:

$$\left.\begin{array}{l} 180^\circ - \gamma = 2\cdot\phi \\ 180^\circ - \delta = 2\cdot\theta \end{array}\right| +$$

$$\left.\begin{array}{l} 360^\circ - \gamma - \delta = 2\cdot(\phi+\theta) \\ 360^\circ - \gamma - \delta = \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2\cdot(\phi+\theta) = \beta \qquad \text{c.q.f.d.}$$



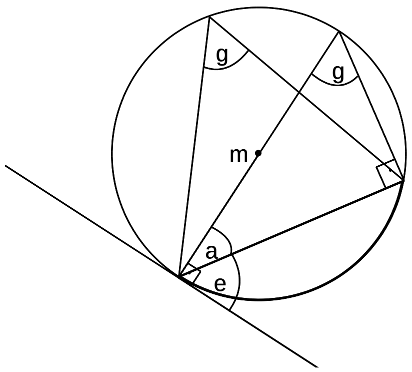
Remarques:

1) Dans un même cercle, tous les angles inscrits interceptant le même arc sont isométriques, car l'angle au centre est toujours le même.

2) Lorsque l'arc intercepté est un demi-cercle, l'angle inscrit est un angle droit (cercle de Thalès), car l'angle au centre est un angle plat.

Théorème 2:

L'angle formé par une tangente et une corde issue du point de contact est isométrique à l'angle inscrit interceptant le même arc de cercle.



Démonstration:

Traçons un angle inscrit tel qu'un côté passe par le centre m du cercle.

$$\left.\begin{array}{l} 90^\circ - \alpha = \gamma \\ 90^\circ - \alpha = \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma = \varepsilon \qquad \text{c.q.f.d.}$$

E.2 Le théorème des sinus

Ce que nous avons vu comme trigonométrie dans un triangle rectangle se laisse généraliser à un triangle quelconque, mais certaines formules s'avèrent être plus complexes.

Pour le calcul dans un triangle quelconque, on utilise essentiellement deux théorèmes, le théorème des sinus et le théorème des cosinus appelé encore le théorème d'Al-Kashi ou encore théorème de Pythagore généralisé. Ces deux théorèmes seront démontrés par la suite.

Théorème des sinus: $\forall \alpha, \beta, \gamma \neq 0 + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}): \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2r$

La démonstration de ce théorème est très bien illustrée dans le livre E.M.5.6.

Dans un triangle, le rapport de la longueur d'un côté par le sinus de l'angle opposé est constant et égal à deux fois le rayon du cercle circonscrit au triangle.

Comme les deux triangles (ABC) et (AEC), inscrits dans le même cercle, ont un côté commun, les angles en B et E ont même mesure.

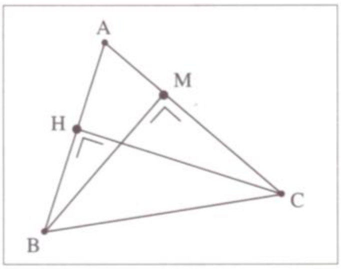
Comme en plus, [BC] est le diamètre du cercle, le triangle (ABC) est rectangle en A de sorte que le sinus de cet angle vaut 1, ce qui démontre la dernière partie de ce théorème.

Démonstration(s) du livre : (scan des pages 104-105)

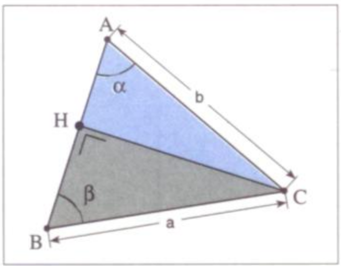
3) Démonstration

Deux cas se présentent :

1) Les trois angles sont aigus.



On trace les hauteurs [CH] et [BM].



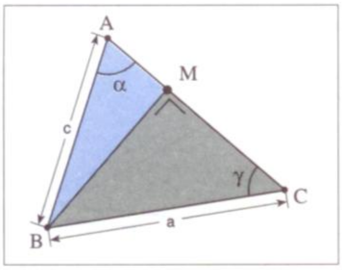
- Dans le triangle rectangle ACH,

$$\overline{CH} = \overline{AC}\sin\alpha = b\sin\alpha.$$

Dans le triangle rectangle BCH,

$$\overline{CH} = \overline{BC}\sin\beta = a\sin\beta.$$

Dès lors, $b\sin\alpha = a\sin\beta$
et donc, puisque $\sin\alpha \neq 0$ et $\sin\beta \neq 0$,
on déduit : $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$.



- Dans le triangle rectangle BAM,

$$\overline{BM} = \overline{AB}\sin\alpha = c\sin\alpha.$$

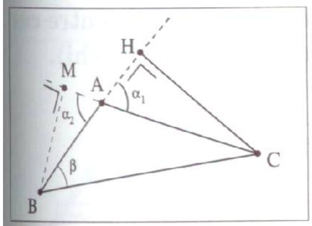
Dans le triangle rectangle BCM,

$$\overline{BM} = \overline{BC}\sin\gamma = a\sin\gamma.$$

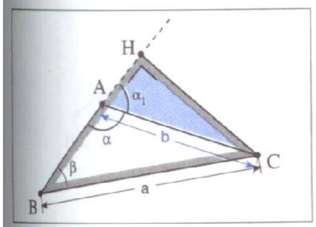
Dès lors, $c\sin\alpha = a\sin\gamma$
et donc, puisque $\sin\alpha \neq 0$ et $\sin\gamma \neq 0$,
on déduit : $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\gamma}$.

Il reste à conclure.

2) Un angle est obtus.



Soit α cet angle.
On trace les hauteurs [CH] et [BM].



- Dans le triangle rectangle ACH,

$$\overline{\mathrm{CH}} = \overline{\mathrm{AC}} \sin \alpha_1 = \mathrm{b} \sin \alpha_1 .$$

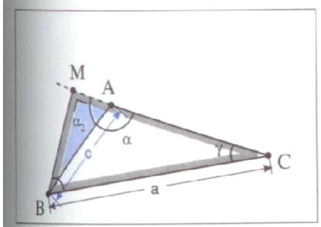
Dans le triangle rectangle BCH,

$$\overline{\mathrm{CH}} = \overline{\mathrm{BC}} \sin \beta = \mathrm{a} \sin \beta .$$

Dès lors, $\mathrm{b} \sin \alpha_1 = \mathrm{a} \sin \beta$.

Comme $\left| \begin{array}{l} \sin \alpha_1 = \sin \alpha \text{ (angles supplémentaires)}, \\ \sin \alpha \neq 0 \text{ et } \sin \beta \neq 0, \end{array} \right.$

on déduit : $\dfrac{\mathrm{a}}{\sin \alpha} = \dfrac{\mathrm{b}}{\sin \beta}$.



- Dans le triangle rectangle BAM,

$$\overline{\mathrm{BM}} = \overline{\mathrm{AB}} \sin \alpha_2 = \mathrm{c} \sin \alpha_2 .$$

Dans le triangle rectangle BCM,

$$\overline{\mathrm{BM}} = \overline{\mathrm{BC}} \sin \gamma = \mathrm{a} \sin \gamma .$$

Dès lors, $\mathrm{c} \sin \alpha_2 = \mathrm{a} \sin \gamma$.

Comme $\left| \begin{array}{l} \sin \alpha_2 = \sin \alpha \text{ (angles supplémentaires)}, \\ \sin \alpha \neq 0, \\ \sin \gamma \neq 0, \end{array} \right.$

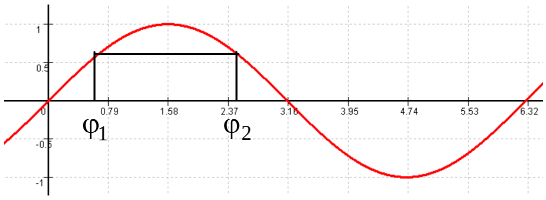
on déduit : $\dfrac{\mathrm{a}}{\sin \alpha} = \dfrac{\mathrm{c}}{\sin \gamma}$.

Il reste à conclure.

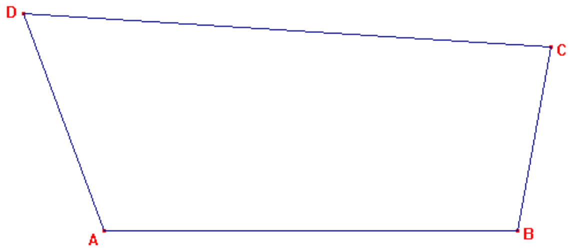
Remarques:

1. A l'aide du théorème des sinus, on peut résoudre des triangles dont on connaît:
   - 2 côtés et 1 angle opposé
   - un côté et 2 angles

2. A chaque valeur de $\sin\varphi$ correspondent 2 angles φ_1 et $\varphi_2 = \pi - \varphi_2$



Exercice posé à l'examen-concours pour l'admission au stage dans la carrière de l'expéditionnaire technique: session de décembre 1987



Calculer la distance entre 2 points inaccessibles A et B, si on connaît les mesures suivantes sur la figure ci-jointe:

$\overline{CD} = 100\,\text{m}$

$\text{mes}\,DCB = 120°$ $\text{mes}\,ACB = 73{,}8°$

$\text{mes}\,BDC = 42°54'$ $\text{mes}\,ADC = 87°12'$

E.3 *Le théorème des cosinus*

Théorème des cosinus (Pythagore généralisé, Al-Kashi)

Dans le triangle quelconque (ABC), on a: $$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \end{cases}$$

Remarque: A l'aide du théorème des cosinus, on peut résoudre des triangles dont on connaît:
- 2 côtés et l'angle compris
- 3 côtés

Remarques :

En général, il faut savoir que, dans les triangles quelconques, les résultats obtenus pour les
- **longueurs** sont des nombres essentiellement positifs. Les solutions négatives sont donc à rejeter.
- **Angles** sont des mesures comprises entre soit 0 et π radians, soit 0° et 180°.

Exemples concrets :

Ex. 237 p. 280 Résous les triangles dans lesquels on te donne :

1) $a = 10 \quad \beta = 30° \quad \gamma = 45°$

Démarche :
- On connaît un côté et deux angles $\rightarrow$ Théorème des sinus pour calculer un deuxième côté
- Comme on connaît le côté a, il nous faut d'abord calculer l'angle α : $\alpha = 180° - \beta - \gamma$
- Formule : $\forall \sin\alpha \neq 0, \forall \sin\beta \neq 0: \ \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} \quad \Rightarrow b = \dfrac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta$
- Pour le calcul de c, on a le choix entre les deux théorèmes des sinus ou cosinus. J'utilise le théorème des sinus : $\forall \sin\alpha \neq 0, \forall \sin\gamma \neq 0: \ \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow c = \dfrac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\gamma$

Calculs :
$$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 105°$$
$$b = 5 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{2} \approx 5{,}176$$
$$c = 10 \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right) \approx 7{,}321$$

2) $\alpha = \dfrac{\pi}{3} \quad b = 10 \quad c = 20$

Démarche :
- On connaît deux côtés et l'angle compris $\rightarrow$ Théorème des cosinus pour déterminer le troisième côté.
- Formule : $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$
- Pour le calcul de β, on a le choix entre les deux théorèmes des sinus ou cosinus. J'utilise le théorème des cosinus, car le résultat est unique :
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \neq 0, \forall c \neq 0: \ \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$$
- L'angle γ se calcule à l'aide de la somme des angles intérieurs d'un triangle.

Calculs :
$$a = 10\sqrt{3} \approx 17{,}32$$
$$\beta = \frac{\pi}{6}$$
$$\gamma = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

Démonstrations du théorème des cosinus (ou Al-Kashi ou Pythagore généralisé)

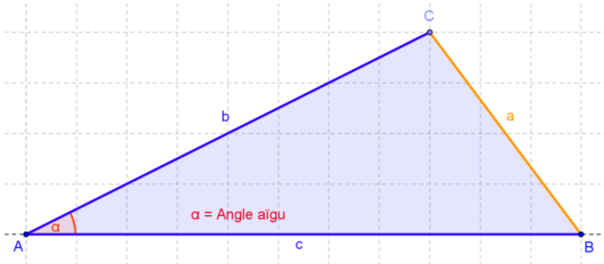
Soit un triangle quelconque (ABC). La relation de Pythagore nous avait permis de mettre en relation les trois côtés d'un triangle rectangle. Se pose la question, s'il n'est pas possible de trouver une relation plus générale pour le cas d'un triangle quelconque.

Pour pouvoir établir une telle relation, il faut nécessairement se ramener à des situations connues, c'est-à-dire à des triangles rectangles. Pour y arriver, nous allons traiter d'abord le cas d'un triangle (ABC) acutangle en A.

On se propose de calculer le tout d'abord sur un exemple numérique pour mieux pouvoir généraliser par la suite.

Soit le triangle (ABC) donné par la figure ci-contre, avec $\overline{AC} = 10cm$, $\overline{AB} = 11cm$ et $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

On demande de calculer la longueur du côté $\overline{BC}$.

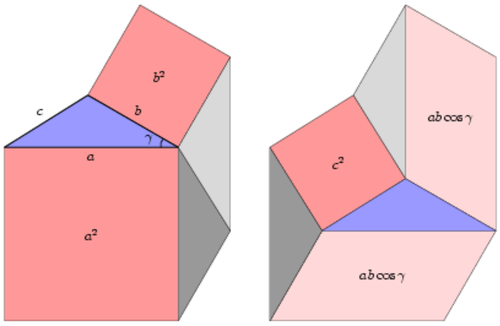


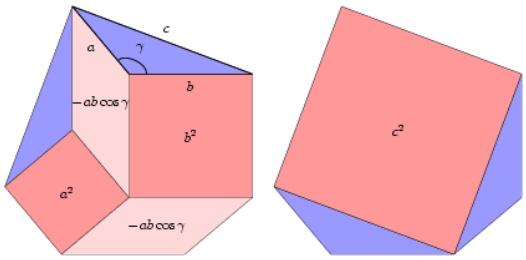
SohCahToa (say it out loud) *Histoire de l'indien*

it stands for:
sine- opposite over hypotenuse (s=o/h)
cosine- adjacent over hypotenuse (c=a/h)
tangent- opposite over adjacent. (t=o/a)

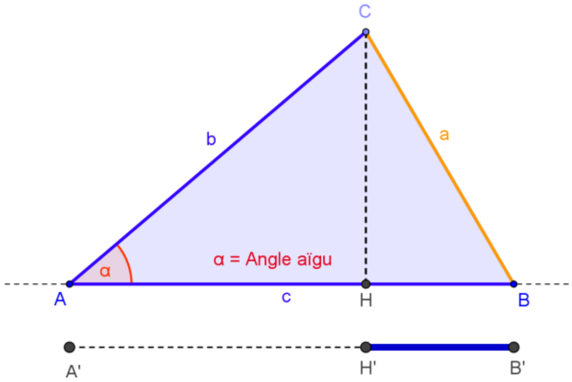
Possibilité de puzzles de démonstration(s)

Il s'agit de négliger les triangles qui ne sont là que pour compléter la figure, quel que soit le cas considéré.

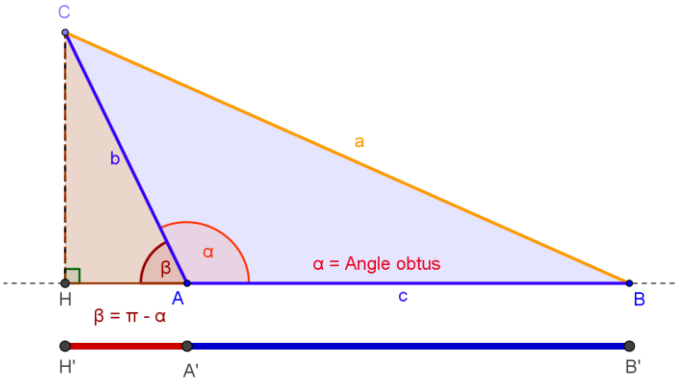




<u>1er cas</u>: α est un angle aïgu



<u>2me cas</u>: α est un angle obtus



$$\begin{aligned}
\overline{BC}^2 &= \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2 \\
&= \overline{CH}^2 + \left(\overline{AB} - \overline{AH}\right)^2 \\
&= \overline{CH}^2 + \overline{AB}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AH} + \overline{AH}^2 \\
&= \overline{AB}^2 + \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AH} \\
\overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{BC}^2 &= \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2 \\
&= \overline{CH}^2 + \left(\overline{AB} + \overline{AH}\right)^2 \\
&= \overline{CH}^2 + \overline{AB}^2 + 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AH} + \overline{AH}^2 \\
&= \overline{AB}^2 + \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2 + 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AH} \\
\overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos(\pi-\alpha)
\end{aligned}$$

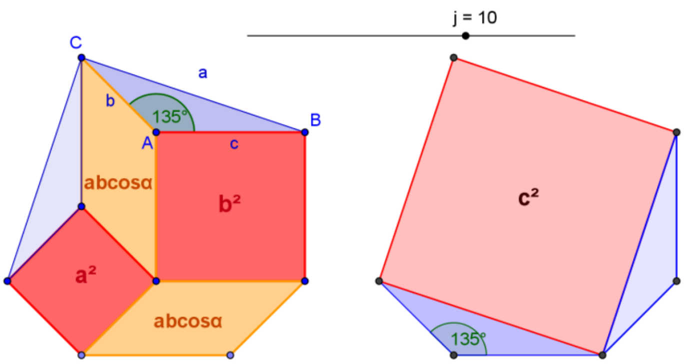
Comme $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$, on obtient dans les deux cas:

$$\boxed{\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\alpha}$$

Les trois cas particuliers:

$\alpha = 0$ $\alpha = \pi$ $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

Animation "active board" possible ?
Redressement du - en +



Il eût été plus raisonnable de construire la figure de base comme dépendante de l'angle α.
On aurait mieux pu la déformer.

1) Construction du carré à base b
2) Construction de l'angle α sous forme dynamique
3) Construction du triangle ABC
3) Construction du premier parallélogramme
4) Construction dans l'ordre des deuxième carré, parallélogramme et triangle.
5) Construction des points images par une translation
6) Construction des trois figures qu'on superpose par translation.

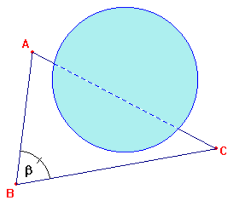
E.4 Exercices d'application plus concrètes

Voici quelques exercices extraits d'un devoir

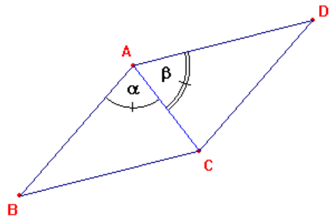
Exercice 1:

1. Enoncer et démontrer le théorème des cosinus (Figure, Démonstration)

2. Pour mesurer la distance de deux points A et C, inaccessibles par ligne droite, on utilise un point B. Sachant que $\beta = 72°$, $\overline{AB} = 12\sqrt{5}\,m$ et $\overline{BC} = 16\,m$, déterminer la distance exacte $\overline{AC}$.



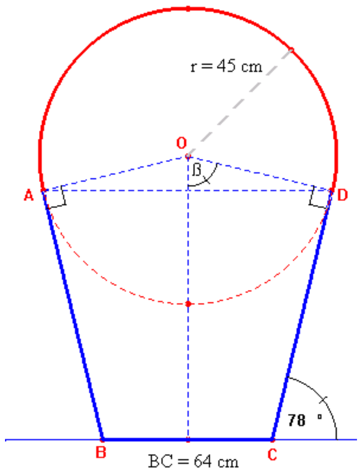
3. Dans le parallélogramme ci-contre, on sait que:
   $\overline{AC} = 12\,cm \text{ et } CBA = 35°$.
   Sachant en plus que les angles α et β sont entre eux comme 9 est à 20 (il s'agit donc d'une proportion), déterminer la longueur de la deuxième diagonale de ce parallélogramme.



Exercice 2:

Le profil d'un canal est représenté par l'esquisse ci-contre.

Le rayon de l'arc de cercle étant r = 45 cm, l'angle que fait le côté oblique avec l'horizontale étant $\alpha = 78°$, la largeur de la base étant 64 cm, calculer l'aire de la coupe de ce canal.

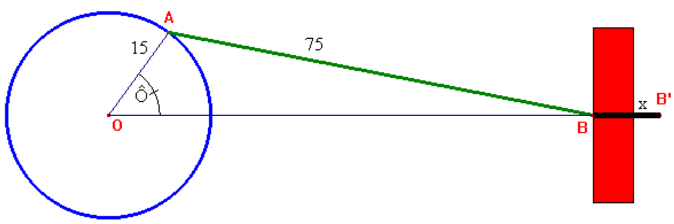


Indications:

- *Mettre en relation l'angle β et l'angle α ;*
- *Déterminer $\overline{AD}$ et en conclure l'aire du triangle OAD;*
- *Déterminer l'aire du secteur de disque OA, OD ;*
- *Calculer la hauteur du trapèze isocèle*

Exercice 3: *Moteur à combustion*

Dans un système bielle-manivelle, la manivelle $\overline{OA} = 15\,cm$ et la bielle $\overline{AB} = 75\,cm$. Calculez la distance $x = \overline{BB'}$ parcourue par le pied de b, lorsque la manivelle tourne d'un angle $\alpha = 48°$.



http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/Sciences/technique/moteur4temps.html

http://archive.geogebra.org/en/upload/files/000FRANCAIS/Jean-Paul/mecaniqueauto/Arbre_cames_soupapes.html

---