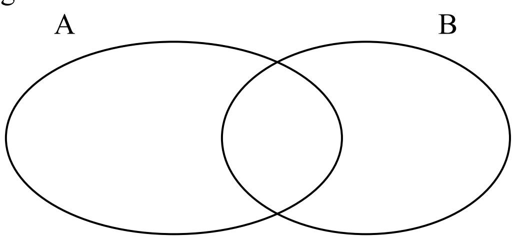
C Opérations sur les ensembles

1. Intersection de deux ensembles

Considérons les deux ensembles A = 0;2;4;6;8 et B = 0;3;6;9 .
Nous remarquons que les éléments 0 et 6 appartiennent à l'ensemble A et à l'ensemble B.
Nous disons que ces éléments appartiennent à l'intersection de A et de B.

Diagramme de Venn :



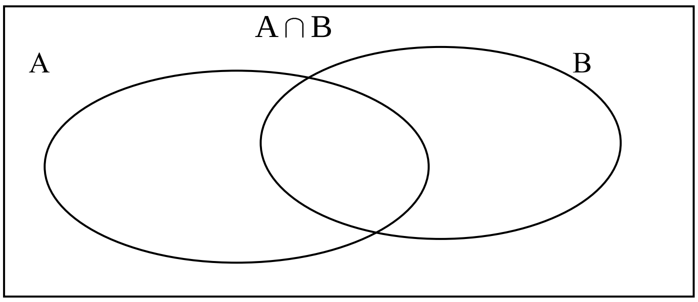
Nous écrivons : $A \cap B =$ 0;6 et nous lisons : A inter B

Définition 13:

> **L'intersection des deux ensembles** A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A et à B.

Formulation mathématique: $\boxed{A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ et } x \in B\}}$

Nous dessinons :



Exemples

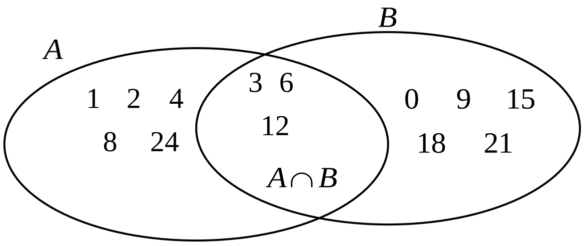
① Soient les deux ensembles
$A = \{x \,/\, x \text{ est un diviseur de } 24\}$ et $B = \{x \,/\, x \text{ est un multiple de 3 inférieur à } 24\}$.
1) Déterminez A et B en extension
2) Déterminez $A \cap B$ et $B \cap A$. Que constatez-vous ?
3) Tracez un diagramme de Venn représentant les deux ensembles.

Résolution:

1) $A=\left\{\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 24 & 12 & 8 & 6\end{matrix}\right\}$ $\quad B=\{0,3,6,9,12,15,18,21\}$

2) $A\cap B=\{3,6,12\}=B\cap A$ L'intersection de deux ensembles est commutative.

3) Le diagramme de Venn:



Remarque: Pour tracer ce diagramme de Venn, il est utile de commencer par l'intersection.

② *Exemple avec quatre ensembles*

Soient les quatre ensembles:

$A=\{x\,/\,x\in\mathbb{N}\ \text{ et }\ x<16\}$ $\quad B=\{x\,/\,x\text{ est un diviseur de 20, inférieur à 20}\}$

$C=\{x\,/\,x\text{ est un multiple de 5 inférieur à 20}\}$ $\quad D=\{2,4,6,8,10,15\}$

1) Déterminez A, B et C en extension.
2) Complétez les lacunes en utilisant les symboles appropriés:
   $B\ ...\ A$ $\quad C\ ...\ A$ $\quad D\ ...\ A$ $\quad B\ ...\ C$
   $B\ ...\ D$ $\quad C\ ...\ D$
3) Que pouvez-vous conclure concernant la relation des ensembles B, C et D en rapport avec l'ensemble A ?
4) Déterminez en extension les ensembles suivants:
   $B\cap C=...$ $\quad B\cap D=...$ $\quad C\cap D=...$
   $(B\cap C)\cap(B\cap D)=...$
5) Tracez un diagramme de Venn complet

Résolution:

1) $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$ $\quad B=\left\{\begin{matrix}1 & 2 & 4\\ & 10 & 5\end{matrix}\right\}$ $\quad C=\{0,5,10,15\}$

2) $B\subset A$ $\quad C\subset A$ $\quad D\subset A$ $\quad B\subset C$

   $B\not\subset D$, car $1\in B$, mais $1\notin D$ $\quad C\not\subset D$, car $5\in C$, mais $5\notin D$

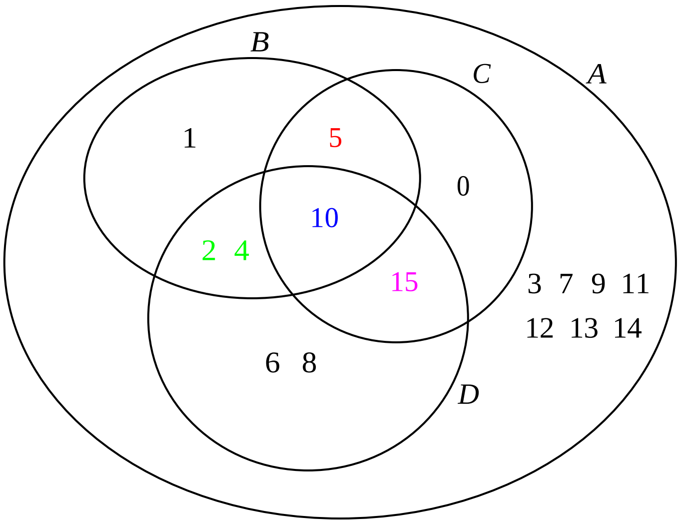
3) On constate que les trois ensembles B, C et D sont des sous-emsembles de A.

4) $B\cap C=\{5,10\}$ $\quad B\cap D=\{2,4,10\}$ $\quad C\cap D=\{10,15\}$

   $(B\cap C)\cap(B\cap D)=\{10\}=\{x\,/\,x\in B\text{ et }x\in C\text{ et }x\in D\}=B\cap C\cap D$

5) Diagramme de Venn

   Comme les ensembles B, C et D sont des parties de A, l'ensemble A est tracé autour des 3 ensembles.



__Remarque__: Pour tracer un diagramme de Venn de trois ensembles qui se "coupent" (B, C et D), on place d'abord les éléments qui se trouvent dans $B \cap C \cap D$, on continue ensuite par compléter les intersections de deux ensembles, pour remplir ensuite les autres plages libres du diagramme de Venn.

Exercice 11

Soient les ensembles $A = 1;2;3;4;5;6;7;8;9;10$, $B = 1;3;5;7;9$, $C = 2;5;7;9;10$ et $D = 3;6;8$. Détermine en extension :

$A \cap A =$ $A \cap B =$

$A \cap C =$ $A \cap D =$

$B \cap C =$ $B \cap D =$

$C \cap D =$ L'intersection des ensembles C et D est ....

Définition 14:

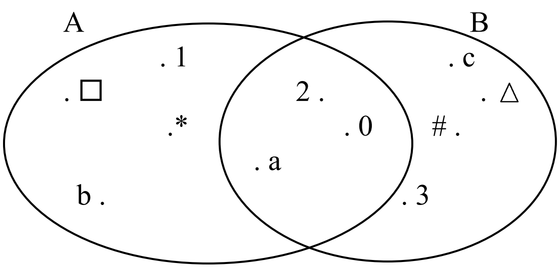
Deux **ensembles** A et B sont dits **disjoints** ssi leur intersection est l'ensemble vide

A et B disjoints $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \varnothing$

Nous constatons: Si $B \subset A$, alors $A \cap B = B$

Exercice 12

Soient les ensembles A et B donnés par un diagramme de Venn :



Déterminez A, B, $A \cap B$ et $B \cap A$ en extension.

A =

B =

$A \cap B =$

$B \cap A =$

Nous remarquons que : ....

Exercice 13

On donne deux ensembles A et B. Dessine un diagramme de Venn et détermine $A \cap B$ en extension.

1) $A = \; 1;2;3;4;5;6;7 \;$, $B = \; 2;4;6;8;10;12$

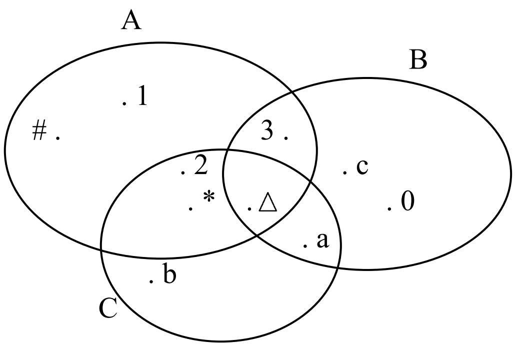
2) $A = \; p;o;i;r;e \;$, $B = \; l;i;v;r;e$

3) $A = \; *;a;o;b;1;\triangle;2 \;$, $B = \; b;2;*;a$

4) $A = \; a;b;4;c;d;o \;$, $B = \; 1;\square;2;\triangle;3;$▱

Exercice 14

On donne le diagramme de Venn suivant :



Détermine A, B, C, $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$ et $A \cap B \cap C$ en extension

Exercice 15

Dans un ensemble de 7 personnes, 5 possèdent une voiture et 4 possèdent une maison. Combien de personnes possèdent une voiture et une maison ? Trouvez toutes les solutions.

Exercice 16 Soit C l'ensemble des élèves d'une classe d'orientation.
Soient L l'ensemble des élèves qui portent des lunettes et J l'ensemble des élèves qui portent des jeans. On dispose des renseignements suivants:

- 18 élèves portent des jeans dont 15 ne portent pas de lunettes
- 3 élèves portent des lunettes mais pas de jeans
- 6 élèves ne portent ni des lunettes, ni des jeans.

Représentez sur un diagramme de Venn les ensembles C, L et J et répondez ensuite aux questions suivantes:

a) Combien d'élèves portent des lunettes et des jeans ?
b) Combien d'élèves portent des lunettes ?
c) Quel est le nombre d'élèves de la classe ?

Exercice 17 Soit C l'ensemble des élèves d'une classe d'orientation qui contient 27 élèves.
Soient T l'ensemble des élèves qui jouent au tennis et F l'ensemble des élèves qui jouent au football. On dispose des renseignements suivants:

- 13 élèves jouent au tennis
- 18 élèves jouent au football
- 2 élèves ne pratiquent aucun sport.

Représentez sur un diagramme de Venn les ensembles C, T et F et répondez ensuite aux questions suivantes:

a) Combien d'élèves pratiquent le football et le tennis ?
b) Combien d'élèves pratiquent le football , mais pas le tennis ?
c) Combien d'élèves pratiquent le tennis , mais pas le football ?
d) Combien d'élèves pratiquent le football ou le tennis ?

2. Réunion de deux ensembles

Considérons les deux ensembles $A = \ 1;2;3;5;7;9$ et $B = \ 1;3;4;5;6;8;10$ et rassemblons dans un nouvel ensemble E tous les éléments des deux ensembles A et B :

$$E = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$$

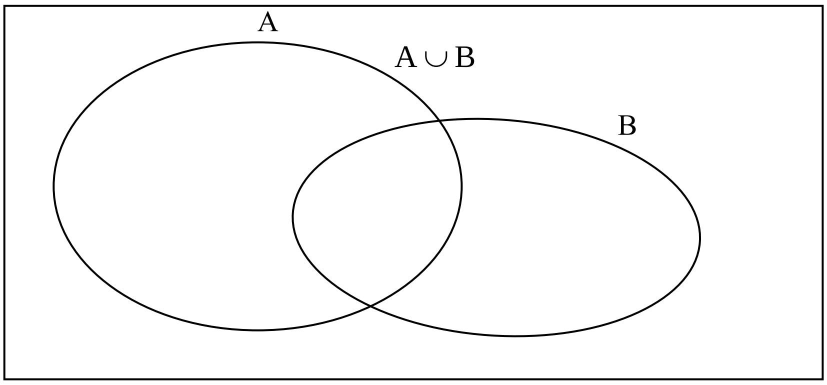
Nous disons que E est <u>la réunion des deux ensembles A et B</u> et nous notons $\underline{A \cup B}$.

Nous lisons <u>A union B</u>.

Définition 14: La **réunion des ensembles** A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B.

Formulation mathématique: $\boxed{A \cup B = \{x / x \in A \ \underline{\text{ou}} \ x \in B\}}$

Nous dessinons :



Exercice 18

On considère les ensembles suivants :

$$A = \{5;6;7;8;9;10\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 7\}$$

Détermine en extension $A \cup B$ et dessine un diagramme de Venn.

Exercice 19

On considère les ensembles suivants :

$$A = \{a;c;e;g;i\} \quad \text{et} \quad B = \{d;j;g;a\}$$

a) Détermine en extension $A \cup B$ et $A \cap B$.

b) Diagramme de Venn

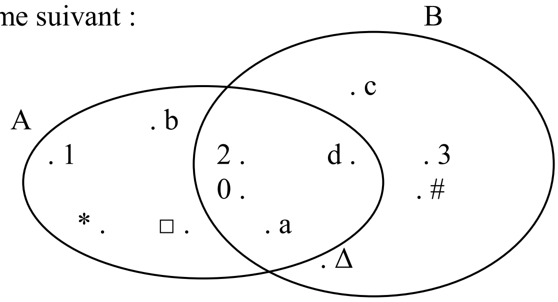
c) Complète les expressions suivantes :

$A \cap B$ A A $A \cup B$

$A \cap B$ B B $A \cup B$ $A \cap B$ $A \cup B$

Exercice 20

On donne le diagramme suivant :



Déterminez en extension les ensembles A, B, $A \cup B$ et $B \cup A$.

A = B =

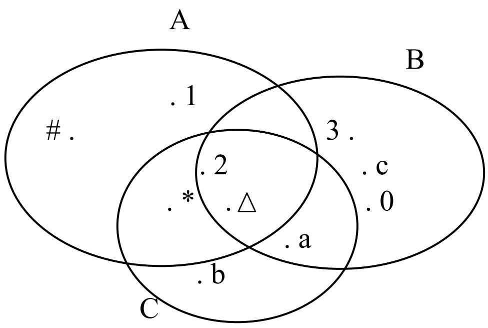
$A \cup B =$ $B \cup A =$

Nous remarquons que:

Exercice 21

On donne le diagramme de Venn suivant :

Déterminez A, B, C, $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cup C$ et $A \cup B \cup C$ en extension



Exercice 22

On considère trois ensembles A, B et C. On sait que :

$A \cap B = \{1;2\}$ $B \cap C = \varnothing$

$A \cap C = \{0;3\}$ $C = \{0;3;4;5\}$

Dispose les éléments 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 dans un diagramme de Venn et détermine par énumération les ensembles A et B.

Exercice 23

On considère trois ensembles A, B et C tels que :

$A \cup B = \{0;1;2;3;4;5;8\}$ $B \cap C = \{3;4;5\}$

$A \cap B \cap C = \{3\}$ $A \cap B = \{3;8\}$

$A \cap C = \{2;3\}$ $B \cup C = \{2;3;4;5;6;7;8\}$

Dispose les éléments 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 dans un diagramme de Venn et détermine en extension les ensembles A, B et C.

Exercices sur les ensembles

2) Intersection et réunion

Exercice N° 4

$A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 \}$, $B = \{ 1 , 3 , 4 , 6 , 7 \}$, $C = \{ 1 , 2 , 7 \}$
1) Faire un diagramme de Venn .
2) Compléter en extension : $A \cap B$, $(A \cap B) \cap C$, $B \cap C$ et $A \cap (B \cap C)$.
3) Que remarque-t-on ?

Exercice N° 5

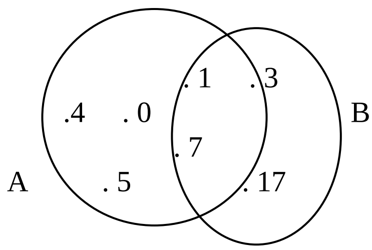
$A = \{ x / x \text{ divise } 90 \}$, $B = \{ x / x \text{ divise } 36 \}$, $C = \{ x / x \text{ divise } 54 \}$.
1) Déterminer en extension les ensembles A , B , C .
2) Faire le diagramme de Venn (feuille de trèfle!)
3) Déterminer $A \cap B \cap C$ en extension , puis en compréhension .
4) Trouver le plus grand commun diviseur des nombres 36 , 54 et 90 .

Exercice N° 6

$A = \{ x / x \text{ multiple de } 8 \}$, $B = \{ x / x \text{ multiple de } 6 \}$, $C = \{ x / x \text{ multiple de } 12 \}$
1) Déterminer en extension les ensembles A , B , C , $A \cap B$ et $(A \cap B) \cap C$.
2) Déterminer $A \cap B \cap C$ en compréhension .
3) Trouver le plus petit commun multiple non nul des nombres 8 , 6 et 12 .

Exercice N° 7

Déterminer en extension les ensembles suivants :
A , B , $A \cap B$.
Comparer $A \cap B$ à $A \cup B$.



Exercice N° 8

Sachant que $A \cup B = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 8 \}$, $B \cap C = \{ 3 , 4 , 5 \}$, $A \cap B \cap C = \{ 3 \}$, $A \cap B = \{ 3 , 8 \}$, $A \cap C = \{ 2 , 3 \}$ et $B \cup C = \{ 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 \}$ disposer tous les éléments 0 ,1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 sur un diagramme de Venn .

Exercice N° 9

$A = \{ x / x \text{ diviseur de } 4 \}$, $B = \{ y / y \text{ multiple de } 4 \text{ et } y < 10 \}$, $C = \{ z / z \text{ impair et } z < 7 \}$
a) Ecrire A , B et C en extension .
b) Déterminer $B \cup C$, $A \cap (B \cup C)$, $A \cap B$, $A \cap C$ et $(A \cap B) \cup A \cap C)$.
c) Compare les ensembles $A \cap B \cup C$ et $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Conclure .
d) Vérifier la propriété trouvée ci-dessus à l'aide de deux diagrammes de Venn .
e) Compléter : card A = … , card $A \cap B)$ = … , card $(A \cap B \cup C)$ = …
card $\varnothing$ = … , card $\{ 0 \}$ = … , card $\{ x \in \mathbb{N} / x \leq 2 \}$ = … .

Exercice 10

Complétez les tableaux suivants en vous aidant d'un diagramme de Venn et sachant que les nombres indiqués forment les cardinaux des ensembles respectifs. Complétez ensuite la formule suivante:

A	B	$A\cap B$	$A\cup B$
4	5	1	
	5	3	6
7	6		9

$$card\ A \ \square\ card\ B = card\ A\cup B\ \square\ card\ A\cap B$$

A	B	C	$A\cap B$	$A\cap C$	$B\cap C$	$A\cap B\cap C$	$A\cup B$	$A\cup C$	$B\cup C$	$A\cup B\cup C$
8	9	12	3	4	5	2				
4	5	2	3		0			6		
	6		3	2	2	1			7	10

Exercice 11 Problème concret 1

Les 950 élèves du lycée se répartissent de la façon suivante:
400 élèves apprennent l'allemand,
620 élèves apprennent l'anglais,
220 élèves apprennent le russe
240 élèves apprennent l'allemand et l'anglais,
60 élèves apprennent l'allemand et le russe,
130 élèves apprennent l'anglais et le russe et
30 élèves apprennent les trois langues.
Combien d'élèves apprennent uniquement l'allemand ?
Combien d'élèves apprennent uniquement l'anglais?
Combien d'élèves apprennent uniquement le russe?
Combien d'élèves apprennent l'allemand et l'anglais mais non le russe?
Combien d'élèves apprennent l'allemand et le russe mais non l'anglais?
Combien d'élèves apprennent l'anglais et le russe mais non l'allemand?
Combien d'élèves apprennent n'apprennent aucune des trois langues?