Chapitre 1 : Les ensembles

A Généralités

1. Ensembles et éléments

Exemples concrets :

$A = \{éléphant, chien, chat, souris, requin, Némo, dauphin, coq, Strauss, pingouin, kangourou, ...\}$

$E = \{éléphant\ asiatique, éléphant\ africain\}$

$C = \{tigre, lion, puma, jaguar, chat\ de\ Siam\}$

$O2 = \{x\ /\ x \text{ est un(e) élève de la classe } O2\}$

On peut décomposer ces ensembles en plusieurs sous-ensembles contenant moins d'éléments.

Définition 1: Un ensemble (eine Menge) est une collection d'objets. Ces objets sont appelés les éléments (die Elemente) de l'ensemble.

Notation: Un ensemble est noté en général par une lettre majuscule, un élément par une lettre minuscule. Un ensemble est caractérisé par des accolades $\{\ ,\ ,\ ,\ \}$ et les éléments compris dans cet ensemble sont séparés par des virgules ou point-virgules.

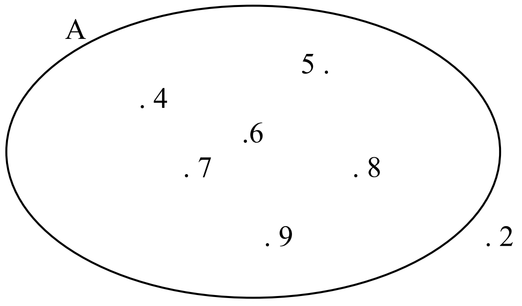
Exemples
- l'ensemble des élèves de la classe O5
- l'ensemble des voitures sur le parking du Glacis
- l'ensemble des magasins dans la Grand-rue à Luxembourg

Remarque importante On ne peut pas parler de l'ensemble des chanteurs célèbres ou de l'ensemble des beaux tableaux, car on ne peut pas définir clairement la célébrité ou la beauté.

Considérons l'ensemble des nombres entiers (ganze Zahlen) de 4 à 9 et appelons-le A. L'ensemble A a pour éléments les nombres 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

Nous écrivons : $A = \ 4;5;6;7;8;9$ et nous lisons : A **est l'ensemble des** éléments 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou l'ensemble A **a pour éléments** 4, 5, 6, 7, 8, 9

Nous pouvons aussi dessiner l'ensemble A :



un diagramme de Venn

(eng Gromper)

Le nombre 6 est un élément de l'ensemble A.

Nous écrivons alors $6 \in A$

et nous lisons : 6 est un élément de (l'ensemble) A ou 6 appartient à A

Le nombre 2 n'est pas un élément de A.

Nous écrivons alors $2 \notin A$

et nous lisons : 2 n'est pas un élément de (l'ensemble) A ou 2 n'appartient pas à A

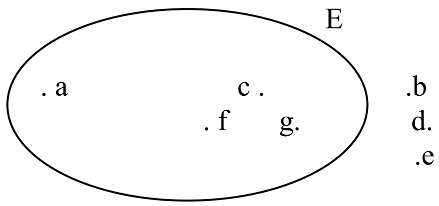
Exercice 1

Soit P l'ensemble des nombres pairs (gerade Zahlen).
Complète :

2 . . . P	7 . . . P	8 . . . P
10 . . . P	0 . . . P	124 . . . P

Exercice 2

On considère le diagramme de Venn suivant :



Complète :

E =

a . . . E	c . . . E	e . . . E	g . . . E
b . . . E	d . . . E	f . . . E	

2. Détermination d'un ensemble

Nous avons déjà vu comment déterminer un ensemble. Nous avons écrit $A = 4;5;6;7;8;9$ en énumérant tous les éléments de l'ensemble A. Ceci s'appelle détermination **en extension** ou détermination par énumération.

Remarque: Dans un ensemble, chaque élément n'est énuméré qu'une seule fois.

Mais nous pouvons aussi déterminer A en donnant une propriété caractéristique à tous les éléments de A. Ainsi, A est l'ensemble des nombres entiers de 4 à 9.

Nous écrivons : $A = \quad x \mid x$ est un nombre entier compris entre 4 et 9

se lit: A est l'ensemble des (éléments quelconques) x tel que x est...

et nous lisons : A est l'ensemble des éléments x tels que x est un nombre entier compris entre 4 et 9.
Nous avons ainsi déterminé A **en compréhension**. (il faut comprendre ce que signifie cette proriété commune)

Exercice 3

Détermine les ensembles suivants en extension : $A = \{x \mid x \text{ est un élève de notre classe qui porte des lunettes}\}$

On lit : A est *l'ensemble des éléments x tels que x est un élève de la classe qui porte des lunettes*

A =

$B = \{x \mid x \text{ est un nombre impair inférieur ou égal à } 15\}$ (kleiner oder gleich)

On lit : B est *l'ensemble des éléments x tels que x est un nombre impair inférieur ou égal à 15*

B =

Ecrivez en compréhension, les ensembles donnés par énumération:

$$C = \{0,2,4,6,8,10,12\} = \{x / x \text{ est un nombre pair inférieur ou égal à } 12\}$$
$$D = \{6,9,12,15,18,21\} = \{x / x \text{ est un multiple de 3 compris entre 5 et } 22\}$$
$$E = \{12,24,36,48,60\} = \{x / x \text{ est un multiple de 12 compris entre 11 et } 61\}$$
$$F = \{1,2,3,6\} = \{x / x \text{ est un diviseur de } 6\}$$
$$G = \{1,3,5,15\} = \{x / x \text{ est un diviseur de } 15\}$$
$$H = \{6,8,12,16,24,48\} = \{x / x \text{ est un diviseur de 48 supérieur à } 5\}$$

Exercices faits en classe (2009): *Changement alternatif de donnée extension-compréhension*

$$\boxed{A = \{0,2,4,6,8,10,12,\ldots\}} = \{x / x \text{ est un multiple de } 2\}$$
$$= \left\{ x / \underbrace{x \text{ est } \underline{\text{un}} \text{ nombre pair}}_{\substack{\text{propriété caractéristique de} \\ \text{chaque élément de cet ensemble}}} \right\}$$

Sous cette forme, on dit que A est noté en compréhension (Verständnis), car il faut comprendre le texte avant de pouvoir écrire l'ensemble en extension.

	en extension		en compréhension
$B =$	$\{3,6,9,12,15,\ldots\}$	$=$	$\{x / x \text{ est un multiple de 3 non nul}\}$
$C =$	$\{0,1,4,9,16,25,\ldots\}$	$=$	$\{x / x \text{ est un carré d'un nombre naturel}\}$
$D =$	$\{7,14,21,28\}$	$=$	$\left\{x / x \text{ est un multiple de 7 plus grand que 0 et plus petit que } 35\right\}$
		$=$	$\{x / x \text{ est un multiple de 7 et } 0 < x < 35\}$
		$=$	$\{x / x \text{ est un multiple de 7 compris entre 0 et } 35\}$

Convention: On retiendra que "***compris entre***" signifie toujours une inégalité stricte et que les bornes (valeurs à gauche et à droite) sont des valeurs de cet ensemble qui ne se trouvent plus dans l'ensemble en extension.

$\boxed{E=\{20,25,30,35,40,45\}}=\{x\,/\,x \text{ est un multiple de 5 et } 15<x<50\}$

$\boxed{F=\{1,2,3,4,6,12\}}=\{x\,/\,x \text{ est un diviseur de } 12\}$

$G=\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 18 & 9 & 6 \end{Bmatrix}=\boxed{\{x\,/\,x \text{ est un diviseur de } 18\}}$

$\boxed{H=\{1,2,4,8,16,32\}}=\{x\,/\,x \text{ est un diviseur de } 32\}$

$=\{x\,/\,x \text{ est une puissance de 2 plus peitie que } 64\}$

$=\{x\,/\,x \text{ est une puissance de 2 inférieure à } 64\}$

Remarque: Nous allons revenir sur ces ensembles de nombres dans la partie B de ce chapitre.

3. Cardinal d'un ensemble

Définition 2: On appelle **cardinal d'un ensemble** A, le nombre d'éléments de cet ensemble.
On note: $card\ \ A$

Définition 3: Un ensemble dont on peut compter les éléments est **un ensemble fini** (eine endliche Menge).

Définition 4: Un ensemble qui ne possède qu'un seul élément est appelé un **singleton** et un ensemble à deux éléments est une **paire**.

Par exemple, a , □ , 129 sont des singletons et 3;12 , □;△ , a;b sont des paires.

Considérons l'ensemble A suivant :
$A=\ x \mid x$ est un élève de la classe O_4 qui possède un permis de conduire . Cet ensemble ne possède pas d'éléments est il est appelé ensemble vide (leere Menge). Nous écrivons $\underline{A=\varnothing}$.

Définition 5: Un ensemble qui ne possède aucun élément est appelé ensemble vide et noté $\varnothing$ ou

Remarques:

- Dans un ensemble, chaque élément n'est énuméré qu'une seul fois.
- Dans un ensemble en extension, l'ordre des éléments ne joue pas de rôle. Cependant, ordonner les éléments peut s'avérer utile lors de la résolution d'un exercice.

Exercice 4: (Géographie)

a) Trouvez le nom d'un village luxembourgeois dont le cardinal de l'ensemble des lettres est 2, 3, 4, 11.
b) Trouvez le nom d'un pays européen dont le cardinal de l'ensemble des lettres est 4.
c) Recherchez un village luxembourgeois dont le nom renferme les cinq voyelles i, u, e, o, a.
Déterminez ensuite le cardinal de l'ensemble des lettres de ce village.

4. Egalité des ensembles

Définition 6: On dit que des **ensembles** sont **égaux** lorsqu'ils ont les mêmes éléments.

Par exemple, les deux ensembles $\mathrm{E}=\{a;b;c;d\}$ et $\mathrm{F}=\{c;a;d;b\}$ sont égaux. On note E = F.

Remarque: L'ordre dans lequel on note les éléments dans un ensemble ne joue pas de rôle.

Exercice 5 Les ensembles suivants sont-ils égaux ? Justifie.

a) $\mathrm{A}=\{1;2\}$ et $\mathrm{B}=\{1;2;1;2;1\}$

b) $C=\{x \mid 0\leq x\leq 5\}$ et $\mathrm{D}=\{0;2;5;3;4\}$

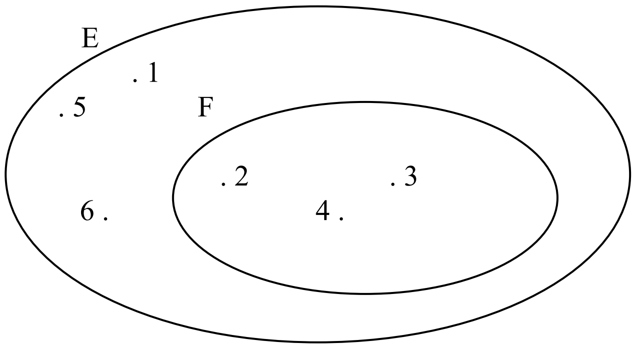
5. Parties d'un ensemble

Considérons les 2 ensembles $\mathrm{E}=\{1;2;3;4;5;6\}$ et $\mathrm{F}=\{2;3;4\}$
Si nous comparons les deux ensembles, nous remarquons que :

Chaque élément de l'ensemble F est aussi un élément de l'ensemble E.

Nous disons que : F est <u>une partie</u> de E
F est <u>un sous-ensemble</u> de E
F est <u>inclus</u> dans E

et nous écrivons : $\mathrm{F}\subset\mathrm{E}$
et nous dessinons :



L'ensemble $\mathrm{G}=\{14;17\}$ <u>n'est pas inclus</u> dans l'ensemble E et nous écrivons $\underline{\mathrm{G}\not\subset\mathrm{E}}$

Exercice 6 On donne les ensembles : $\mathrm{E}=\{a;b;c;d;e\}$, $\mathrm{A}=\{b;d;e\}$ et $\mathrm{B}=\{a;e;i\}$.

A-t-on $\mathrm{A}\subset\mathrm{E}$? Pourquoi ?

A-t-on $\mathrm{B}\subset\mathrm{E}$? Pourquoi ?

Diagrammes :

Remarque : Soit l'ensemble $E = \ a;b;c;d\ $.

Nous écrivons: $a \in E$ et nous lisons : a ***est un élément de*** E

$\ a\ \subset E$ et nous lisons : le singleton a ***est un sous-ensemble de*** E

A retenir absolument:

Nous écrivons donc « $\in$ » ou « $\notin$ » entre éléments et ensembles « $\subset$ » ou « $\not\subset$ » entre ensembles et ensembles

6. Sous-ensembles particuliers

Considérons les ensembles A, G et E suivants :

$A = \ x \mid x$ est un élève de la classe O_5 et x possède un permis de conduire

$G = \ x \mid x$ est un garçon de la classe O_5 et $E = \ x \mid x$ est un élève de la classe O_5 .

* Nous avons déjà vu que $A = \varnothing$.
Mais nous avons aussi $A \subset E$, donc $\varnothing \subset E$.
Nous admettons que :
$\varnothing$ est une partie de tout ensemble

* Nous pouvons aussi écrire que $E \subset E$.
E est appelé la partie pleine de E
Nous admettons que :
Tout ensemble est une partie de lui-même

* L'ensemble G n'est ni la partie pleine de E, ni la partie vide de E
Nous disons que G est une partie propre de E

B Les ensembles de nombres

Définition 7: Les nombres 0, 1, 2, 3, 4, ... sont appelés <u>les nombres entiers naturels</u> (natürliche, positive Zahlen) et leur ensemble est noté $\underline{\mathbb{N}}$.

Exercice 7 Détermine les ensembles suivants en compréhension :

$C = 0;1;2;3;4;5;6;7;8;9$ C =

On lit :

$D = 0;2;4;6;8$ D =

On lit :

Nous savons que $\mathbb{N} = 0;1;2;3;4;\dots$. Comme la liste des nombres entiers naturels ne s'arrête jamais, on dit que $\mathbb{N}$ est <u>un ensemble infini</u> (eine unendliche Menge).

Définition 8: L' ensemble qui réunit tous les nombres entiers, positifs et négatifs, est appelé l'**<u>ensemble des nombres relatifs</u>** et noté $\mathbb{Z}$. $\boxed{\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}}$

Définition 9: L' ensemble des nombres fractionnaires (Bruchzahlen), positifs et négatifs, est appelé l'**<u>ensemble des nombres rationnels</u>** et noté $\mathbb{Q}$. $\boxed{\mathbb{Q} = \left\{\dots,-\frac{3}{7},\dots,-\frac{2}{11},-1,0,1,\frac{12}{7},\frac{13}{5},\dots\right\}}$

Remarques: a) Ces deux ensembles de nombres $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ contiennent également un nombre infini d'éléments. Chacun de ces ensembles est donc également un ensemble infini.
b) Dans ce chapitre, nous allons essentiellement utiliser l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

Définition 10: L' ensemble qui réunit tous les nombres entiers multiples de 2 est appelé l'ensemble des nombres pairs et noté $2\cdot\mathbb{N} = \{0,2,4,6,8,10,\dots\}$.

En général

Définition 11:L'ensemble qui réunit tous les nombres entiers multiples d'un nombre naturel quelconque a $(a \neq 0)$ est appelé noté $a\cdot\mathbb{N} = \{0,a,2a,3a,4a,5a,\dots\}$.

Définition 12:L'ensemble qui réunit tous les nombres entiers diviseurs d'un nombre naturel quelconque a est appelé noté $Div(a)$.

Exemples: $\{0,4,8,12,16,\dots\} = 4\cdot\mathbb{N}$ $Div(6) = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{Bmatrix}$ $Div(24) = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 24 & 12 & 8 & 6 \end{Bmatrix}$

Exercice 8 Ecrire en extension / en compréhension les ensembles de nombres donnés:

$A=\{x / x \in 3\mathbb{N} \text{ et } x<18\}$

$B=\{x / x \text{ est un diviseur de } 48\}$

$C=\{6,12,18,24,30,36\}$

$D=\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 \\ 72 & 36 & 24 & 18 & 12 & 9 \end{matrix}\right\}$

Exercices de révision des compétences acquises

Exercice 9

Soient les ensembles $E = \ a;q;r;s;* \ $ et $A = \ x;y;z;b \ $.
Réponds par vrai (V) ou faux (F) aux affirmations suivantes :

$a \in E$	$* \in A$	$x \ \in A$
$q \in E$	$u \in E$	$\varnothing \subset \ y$
$r \notin E$	$0 \notin A$	$x;z \ \subset A$
$s \in E$	$A \subset E$	$x;s \ \subset A$
$q \subset E$	$\varnothing \not\subset A$	$x;y;z;b;s \ \subset A$
$\varnothing \subset \varnothing$	$E \subset E$	$a;q;r \ \in E$

Exercice 10

Soit l'ensemble $E = \ \triangle;3\cdot 4;a;b;*;3+5;6 \ $. Complète par un des symboles $\in, \notin, \subset, \not\subset$:

$5 \ldots E$	$4;6 \ \ldots E$	$5\cdot 2 \ldots E$
$*;b \ \ldots E$	$12-2 \ldots E$	$3;5 \ \ldots E$
$6\cdot 2 \ \ldots E$	$\varnothing \ldots E$	$E \ldots E$
$12:3 \ldots \mathbb{N}$	$\left\{\frac{72}{16}\right\} \ldots \mathbb{N}$	$\{x / x \text{ est un diviseur de } 36\} \ldots \mathbb{N}$

Exercices sur les ensembles

1) Ecriture d'ensembles, appartenance, inclusion, cardinal

Exercice 1

a) Ecrire les ensembles suivants en *extension* :

A = { $x / x \in \mathbb{N}$ et $3 \leq x \leq 6$ } B = { x / x est un multiple de 3 et $x < 21$ }

C = { x / x est impair et $x \leq 18$ } D = { x / x est pair et $2 < x \leq 10$ }

E = { x / x est un diviseur de 32 } F = { x / x est un multiple de 25 }

b) Ecrire les ensembles suivants en *compréhension* :

A = { 0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 } B = { 1 , 2 , 3 , 6 , 9 , 18 , 27 , 54 }

C = { 0 , 1 } D = { 0 , 5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30 }

E = { 8 , 16 , 32 , 64 } F = { 37 , 74 , 111 }

Exercice N° 2 Appartenance et inclusion

Compléter par le symbole convenable : $\boxed{\in , \notin , \subset , \not\subset}$

1) $0 \ldots \mathbb{N}$ 2) $1 \ldots \mathbb{N}_0$ 3) $0 \ldots \mathbb{N}_0$ 4) $\{ 0 \} \ldots \mathbb{N}$ 5) $\frac{1}{2} \ldots \mathbb{N}$

6) $\mathbb{N}_0 \ldots \mathbb{N}$ 7) $\{ 0 , 1 \} \ldots \mathbb{N}_0$ 8) $\{ 1 , 2 , 3 , 4 \} \ldots \mathbb{N}_0$ 9) $\varnothing \ldots \{ 0 \}$

10) $\varnothing \ldots \mathbb{N}$ 11) 37 … { x / x divise 111 } 12) { b , a , r , r , e } … { a , b , e , r }

13) { $x / x \in \mathbb{N}$ et $8 > x \geq 5$ } … { x / x divise 30 }

14) { x / x est une lettre du mot " jean " } … { x / x est une lettre du mot " jeannette " }

Exercice N° 3

Par quel nombre naturel faut-il remplacer la lettre x pour que l'on ait :

a) $\{ 2 , x \} \subset \{ 1 , 3 , 2 \}$

b) $\{ 2 , 7 \} \subset \{ 1 , 7 , x , 5 \}$

Indiquer toutes les solutions possibles .