Calcul d'aires « entre courbes »

Dans les exemples suivants, il s'agit de calculer l'aire de la partie (finie) du plan délimitée par les deux courbes des fonctions données et les bornes de l'intervalle donné. Au cas où cet intervalle est $I_{aire} = [a;b]$, vous êtes censé prendre pour a et b les bornes d'intersection « extérieures » de la partie du plan enfermée. Celles-ci se déterminent par le calcul (*et se laissent aisément contrôler dans Geogeabra*).

Exercice 1

1)	$f(x)=2$	$g(x)=-x^3+x^2+2x+2$	$I_{aire}=[a;b]$
2)	$f(x)=x$	$g(x)=2x^3+2x^2-3x$	$I_{aire}=[a;b]$
3)	$f(x)=x-1$	$g(x)=-x^3+x^2+3x-1$	$I_{aire}=[a;b]$
4)	$f(x)=x^2$	$g(x)=x^3+x^2-4x$	$I_{aire}=[a;b]$
5)	$f(x)=-\sqrt{x}$	$g(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{x}}$	$I_{aire}=[1;9]$
6)*	$f(x)=\lvert\ln(x+3)\rvert$		$I_{aire}=[-e;1]$

Exercice 2 *Devoir 2008-09-1D-Données-II-2*

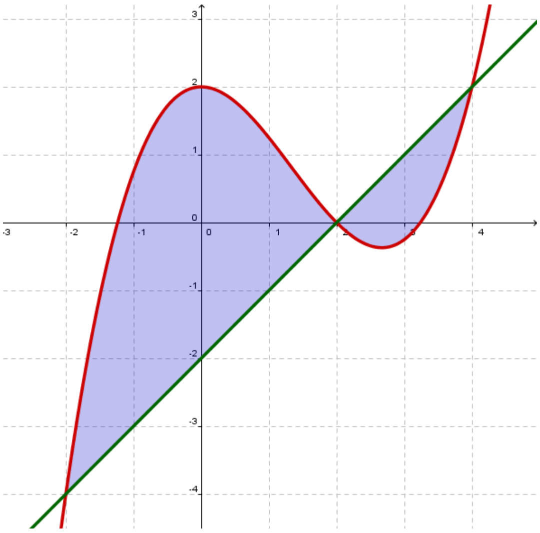


Figure 1: $f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+2$

- Etablissez l'équation de la droite à partir de la figure;
- Déterminez, par le calcul, les bornes d'intégration;
- Calculez ensuite l'aire de la surface coloriée.

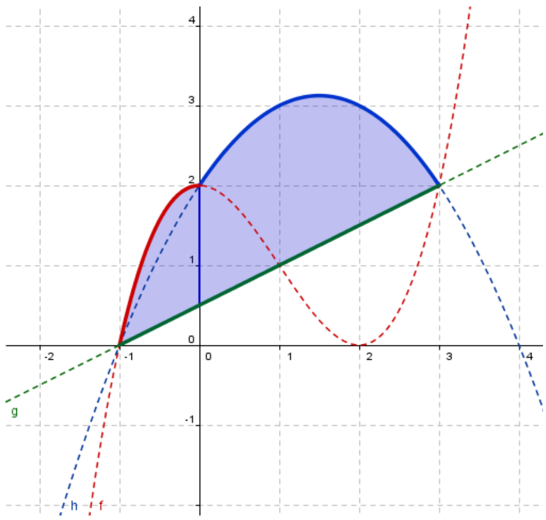


Figure 2:

Lisez les bornes sur le graphique et déterminez l'aire de la surface coloriée, sachant que :

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x^3-3x^2\right)+2 \qquad g(x)=\frac{1}{2}(x+1) \qquad h(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$$

Le corrigé de cet exercice se trouve soit sous forme du ***corrigé de devoir***, soit dans ***Devoirs-Type-Aires.pdf***

Calcul d'aires et volumes « entre courbes »

Dans les exemples suivants, il s'agit de calculer aussi bien une aire qu'un volume de rotation autour de l'axe (Ox) à partir de la donnée de deux fonctions enfermant une partie du plan.

Exercice 3

1)	$f(x)=1$	$g(x)=-x^3+x^2+2x+1$	$I_{aire}=[a;b]$	$I_{vol}=[0;2]$
2)	$f(x)=x+2$	$g(x)=2x^3+2x^2-3x+2$	$I_{aire}=[a;b]$	$I_{vol}=[-2;0]$
3)	$f(x)=x+2$	$g(x)=-x^3+x^2+3x+2$	$I_{aire}=[a;b]$	$I_{vol}=[0;2]$
4)	$f(x)=x^2-5$	$g(x)=x^3+x^2-4x-5$	$I_{aire}=[a;b]$	$I_{vol}=[0;2]$
5)	$f(x)=-\sqrt{x}$	$g(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{x}}$	$I=[1;4]$	
6)**	$f(x)=\lvert\ln(x+3)\rvert$		$I_{aire}=[-e;e]$	$I_{vol}=[-2;e]$

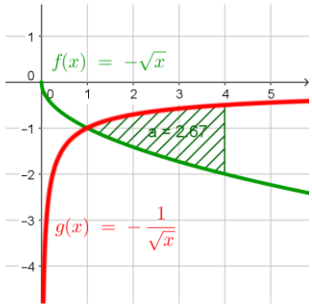
Exercice 3.5

Calcul de l'aire

- Positions des deux courbes :

$$\forall x>0:\ f(x)-g(x)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad -\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad -x+1\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\leq 1$$

x	0		1		4	
$f(x)-g(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
Positions	$\|\|$	$\frac{\mathscr{C}_f}{\mathscr{C}_g}$	*Int*	$\frac{\mathscr{C}_g}{\mathscr{C}_f}$	$\frac{\mathscr{C}_g}{\mathscr{C}_f}$	$\frac{\mathscr{C}_g}{\mathscr{C}_f}$



- Primitive pour le calcul d'aire :

$$H(x)=\int\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int\left(-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=-\int x^{\frac{1}{2}}\,dx+\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+k$$

$$H(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x}(-x+3)+k$$

- Aire cherchée : $Aire=-\left[H(x)\right]_1^4=H(1)-H(4)=\frac{2}{3}\cdot\left[1\cdot 2-2\cdot(-1)\right]=\frac{8}{3}\ u.a.$

Calcul de volume

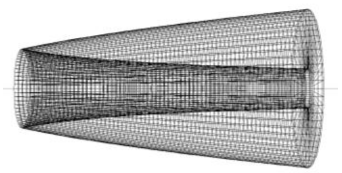
Toutes les deux fonctions étant négatives sur l'intervalle considéré et $\mathscr{C}_f$ est plus éloignée de (Ox) que $\mathscr{C}_g$[1], ce que l'on peut déduire de la position relative des deux courbes, il faut calculer l'intégrale suivante pour obtenir le volume : $Volume=\pi\cdot\int_1^4\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx$

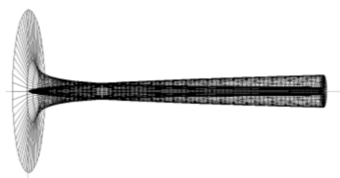
- Primitive pour le calcul de volume:

$$H(x)=\int\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx=\int\left(x-\frac{1}{x}\right)dx\overset{x\in[1;4]}{=}\frac{1}{2}x^2-\ln(x)(+k)$$

- Volume = $\pi\cdot\left[H(x)\right]_1^4=\pi\cdot\left[\left(8-\frac{1}{2}\right)-\left(\ln(4)-0\right)\right]=\left(\frac{15}{2}-2\ln 2\right)\cdot\pi\approx 6{,}11371\cdot\pi\approx 19{,}21\ \ u.v.$

Représentation du volume de rotation autour de (Ox) sur l'intervalle $[1;4]$





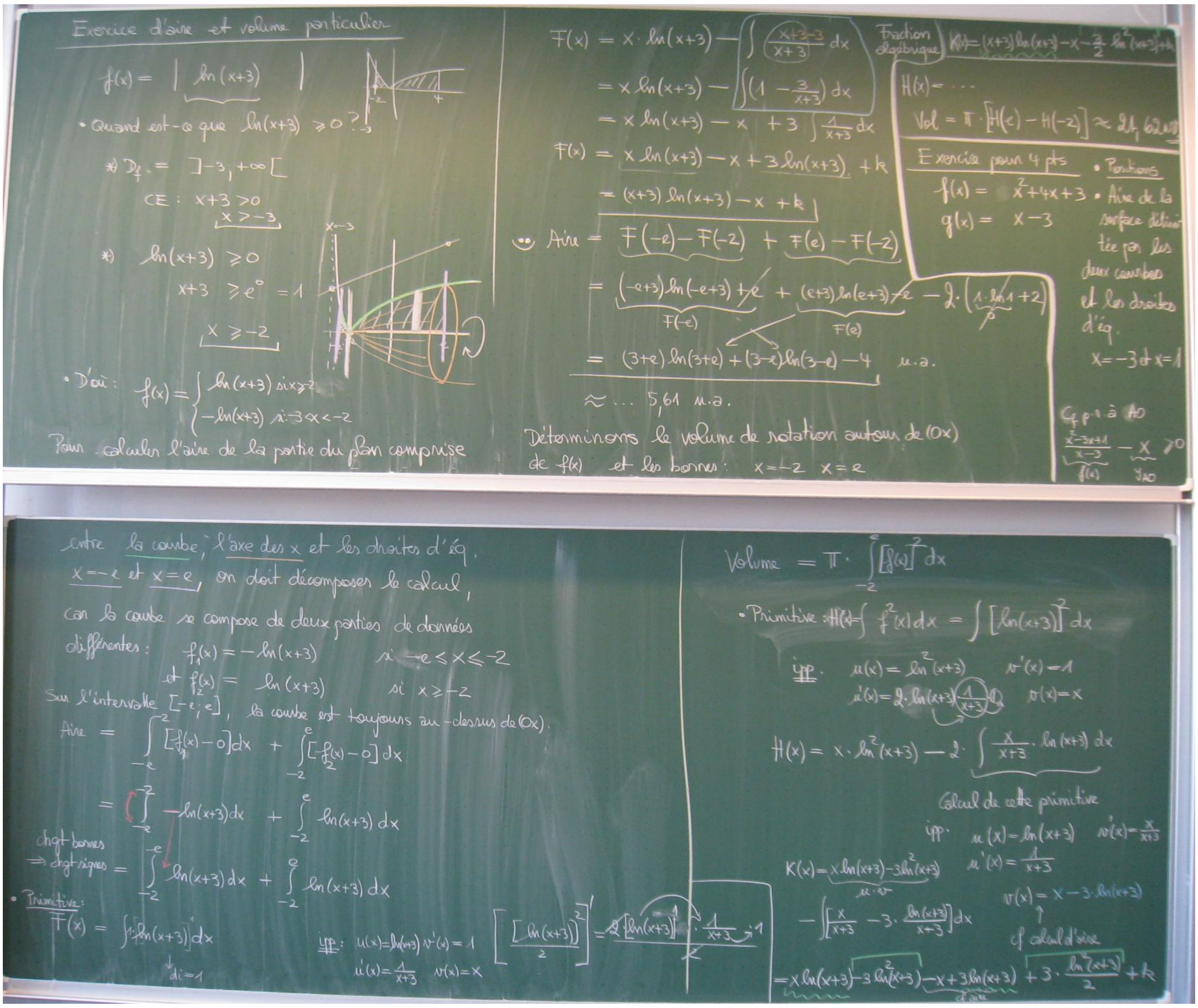
Représentation du volume de rotation autour de (Ox) sur l'intervalle $[0{,}01;4]$

---

[1] Pour un volume de rotation autour de (Ox), on considère toujours :

$\boxed{\text{le carré de la fonction la plus éloignée – le carré de la fonction la plus rapprochée de } (Ox)}$

Exercice 3.6 fait au cours !



Exercice 4 Aire entre tangentes à une courbe d'un point extérieur à la courbe et la courbe elle-même.

3. EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES

206. Étudie la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \frac{1}{x^2+1}.$$

207. 1) Représente graphiquement la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to xe^{-\frac{x}{2}}.$$

2) Combien y a-t-il de *tangentes* à cette courbe comprenant :

a) l'origine $(0,0)$?

b) le point $A(-1;0)$ de l'axe x ?

Écris leur équation cartésienne.

Ex 207 p. 248

a) Contrôlons si $O(0;0) \in \mathscr{C}_f$:

$$f(0) = 0 \Rightarrow O \in \mathscr{C}_f$$

$$f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + x \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot (x-1)$$

$$f'(0) = -\frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

$D'où$: $\underline{t_{x=0} \equiv y = \frac{1}{2}x}$ solution unique

Par conséquent, il n'existe qu'une seule tangente à la courbe en $x_0 = 0$, ce qui est normal pour un point O appartenant à la courbe elle-même !

b) Contrôlons si $A(-1;0) \in \mathscr{C}_f$: $\quad f(-1) = -e^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{e} \neq 0 \Rightarrow A \notin \mathscr{C}_f$

Calculons alors de manière générale l'équation de la tangente à la courbe en un point inconnue d'abscisse x_p :

$$f(x_p) = x_p \cdot e^{-\frac{x_p}{2}} \quad et \quad f'(x_p) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x_p}{2}} \cdot (x_p - 1)$$

D'où l'équation de la tangente en général au point $P(x_p; f(x_p))$:

$$t_{x=x_p} \equiv y - \underbrace{x_p \cdot e^{-\frac{x_p}{2}}}_{f(x_p)} = \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x_p}{2}} \cdot (x_p - 1)}_{f'(x_p)} \cdot (x - x_p)$$

Or cette droite tangente t doit passer par le point A ! D'où :

$$A(-1;0) \in t \quad \Leftrightarrow \quad t_{x=x_p} \equiv 0 - x_p \cdot e^{-\frac{x_p}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x_p}{2}} \cdot \underbrace{(x_p - 1) \cdot (-1 - x_p)}_{\text{produit de binômes conjugués}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x_p}{2}} \cdot (1 - x_p^2) - x_p \cdot e^{-\frac{x_p}{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x_p}{2}}}_{>0} \cdot (-x_p^2 - 2x_p + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x_p^2 - 2x_p + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_p = -1 - \sqrt{2} \quad ou \quad x_p = -1 + \sqrt{2} \quad \text{2 solutions} \Rightarrow \text{2 tangentes !}$$

Ces abscisses trouvées sont les abscisses des points de contact des deux tangentes à la courbe issues du point *A* extérieur à la courbe. En remplaçant ces valeurs dans l'équation générale de la tangente à cette courbe, on trouve :les deux équations cartésiennes des tangentes passant par *A*.

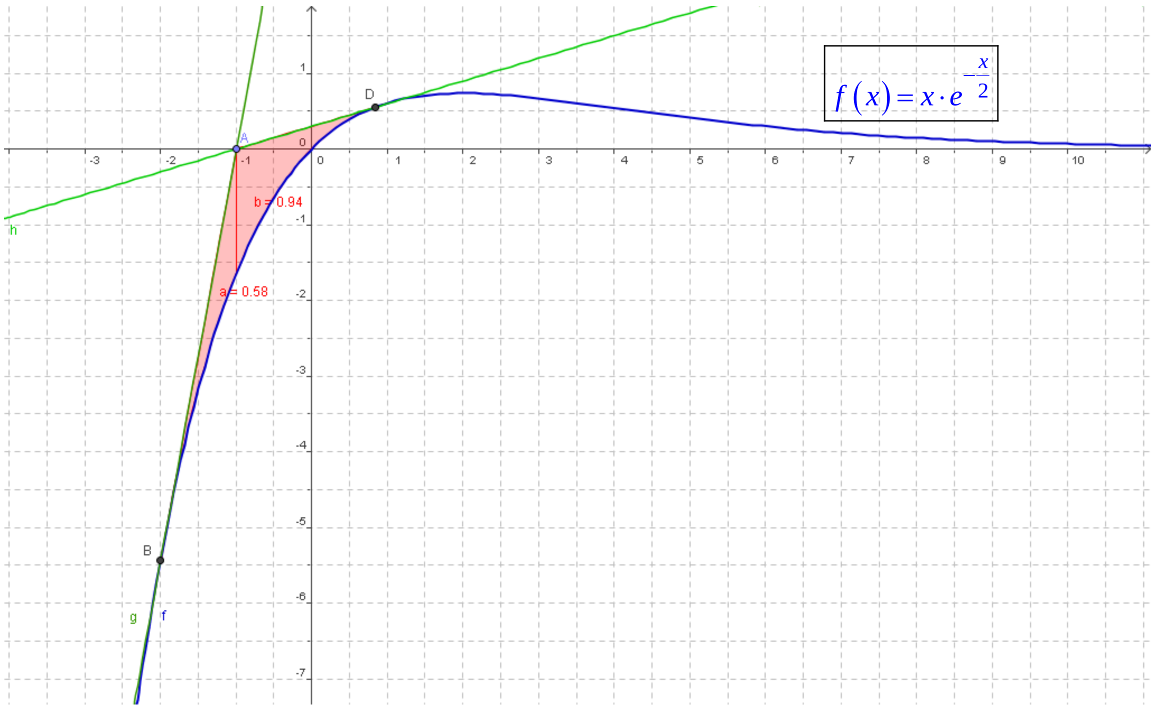
- $$t_{x=-1-\sqrt{2}} \equiv y = -\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \cdot (-1 - \sqrt{2} - 1) \cdot (x + 1 + \sqrt{2}) + (-1 - \sqrt{2}) \cdot e^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$$

$$t_{x=-1-\sqrt{2}} \equiv y = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \cdot (2 + \sqrt{2}) \cdot x - (1 + \sqrt{2}) \cdot \left[e^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - (2 + \sqrt{2}) \right]$$

- $$t_{x=-1+\sqrt{2}} \equiv y = -\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1-\sqrt{2}}{2}} \cdot \left(-1+\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(x+1-\sqrt{2}\right)+\left(-1+\sqrt{2}\right)\cdot e^{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}$$
  $$t_{x=-1+\sqrt{2}} \equiv y = \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1-\sqrt{2}}{2}} \cdot \left(2-\sqrt{2}\right)\cdot x-\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot\left[e^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-\left(2-\sqrt{2}\right)\right]$$

Si on veut vraiment « s'amuser », on peut encore calculer l'aire de la partie du plan délimitée par ces tangentes et la courbe. Comme il y deux tangentes, cette aire doit être calculée en deux temps.

<u>Voici l'illustration de la situation</u>



<u>Exercice 5</u> *Examen CD – 09/2015-16*

Soit la fonction *f* définie par $f(x)=3^{-x}$. Indiquez *dom f* et calculez $f'(x)$. Montrez qu'il existe une seule tangente au graphique G_f de *f* passant par l'origine. Trouvez son équation réduite.

<u>Résolution</u>

$dom\, f = \mathbb{R} = dom\, f'$ $\quad \forall x \in dom\, f':\quad f'(x) = -\ln 3 \cdot 3^{-x}$

Equation d'une tangente à la courbe en $x_0 = a$: $t \equiv y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$

$$\Leftrightarrow \quad y = -\ln 3\cdot 3^{-a}\cdot(x-a)+3^{-a}$$

$$O(0;0)\in t \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -\ln 3\cdot 3^{-a}\cdot(-a)+3^{-a} \qquad \left|\cdot 3^{a} \neq 0\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = a\cdot \ln 3 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{\ln 3}$$

Comme solution est unique, il n'existe qu'une seule tangente à la courbe passant par l'origine.

L'abscisse de ce point de tangeance est $a = -\dfrac{1}{\ln 3}$.