J Exercices d'équations du second degré renfermant un paramètre

Exemple Déterminez, suivant les valeurs du paramètre $m, m \in \mathbb{R}$, le nombre de racines de l'expression du second degré: $E_m(x) = (m+1)x^2 - 2(m-2)x + 5m + 4$

Résolution: On peut considérer Δ sous la condition que cette expression est une expression du second degré.Il faut donc commencer par une discussion sur le degré de cette expression.

☺ Si $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$, on trouve: $E_{-1} = 6x - 1$,

ce qui nous mène à une seule racine: $x = \frac{1}{6}$

☻ Si $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$: $E_m(x)$ est une expression du second degré avec $a = m+1$ $b = -2(m-2)$ et $c = 5m+4$.

Pour déterminer les racines, nous considérons le discriminant:

$$\begin{aligned}
\Delta &= 4(m-2)^2 - 4(m+1)(5m+4) \\
&= 4(m^2 - 4m + 4) - 4(5m^2 + 9m + 4) \\
&= 4(-4m^2 - 13m) \\
\Delta &= -4m(4m+13)
\end{aligned}$$

Rappelons que le discriminant nous renseigne sur le nombre de racines de cette expression, suivant son signe. Etudions donc le signe de Δ, sous la condition que $m \neq -1$.

m		$-\frac{13}{4}$		-1		0	
$-4m(4m+13)$	$-$	0	$+$	$\vert\vert$	$+$	0	$-$

D'où la conclusion:

$\forall m \in \left]-\infty; -\frac{13}{4}\right[\cup \left]0; +\infty\right[$ $E_m(x)$ n'admet aucune racine

$\forall m \in \left\{-\frac{13}{4}; -1; 0\right\}$ $E_m(x)$ admet une racine réelle

$\forall m \in \left]-\frac{13}{4}; -1\right[\cup \left]-1; 0\right[$ $E_m(x)$ admet exactement deux racines réeles distinctes.

Remarque: Il convient de pointer l'attention sur le fait que les racines $-\frac{13}{10}$ et 0 sont des racines doubles, alors que la racine -1 est une racine isolée du fait qu'elle provient d'une équation du premier degré.

Exercices du livre EM4 avec solution partielle

Ex 372 p.307 (mais sous forme d'expression)

1) $E_m(x) = mx^2 - x + m$ $\qquad \Delta = 1 - 4m^2$

3) $E_m(x) = (2m-1)x^2 - mx + m$ $\qquad \Delta = -m(7m-4)$

4) $E_m(x) = (m+1)x^2 + 3mx - (m-1)$ $\qquad \Delta = 13m^2 - 4$

Ex 376 p.307 (mais sous forme d'expression)

1) $E_m(x) = mx^2 + (2m+1)x + m + 2$ $\qquad \Delta = 1 - 4m$

4) $E_m(x) = (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3$ $\qquad \Delta = 24m - 8$

6) $E_m(x) = mx^2 + (m-1)x + m - 1$ $\qquad \Delta = -(m-1)(3m+1)$

5) $E_m(x) = (m-1)x^2 - 4mx - 2(m+2)$ $\qquad \Delta = 24m^2 + 8m - 16$ $\qquad \Delta_m = 1600$

3) $E_m(x) = (m-4)x^2 - (m-6)x + m - 5$ $\qquad \Delta = -3m^2 + 24m - 44$ $\qquad \Delta_m = 48$

Pour aller plus loin section B

voir partie cours 9

Exercice: Déterminez le nombre et le signe des racines de l'équation paramétrique $(m \in \mathbb{R})$:

1) $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + 3(m+1) = 0$

2) $(4-m)x^2 + (2m-6)x - 4m + 12 = 0$

3) $(2m-1)x^2 + 2(1-m)x - 3m - 1 = 0$ $\qquad$ *voir cours*

4) $x^2 - (9+m)x + 7m - 1 = 0$

5) $(m+1)x^2 - 2(m-2)x + 5m + 4 = 0$

6) $(2m-1)x^2 - (3m+2)x + m + 1 = 0$

m	$-\infty$		$-4-2\sqrt{2}$		$-4+2\sqrt{2}$		$\frac{1}{2}$		
Δ	+	+	0	−	0	+	‖	+	+
Conclusion		2 *rrd*	1 *rd*	0 *rac*	1 *rd*	2 *rrd*	1 *r*	2 *rrd*	2 *rrd*

Exercices M. Bremer 3B 14-11-2013

1) $T(x) = (m-6)x^2 - 4x(m-1) + (m-3) = 0$ $\quad$ *voir cours*

2) $T(x) = (m+1)x^2 - 2(m+2)x + (m+2)^2(m+1)$

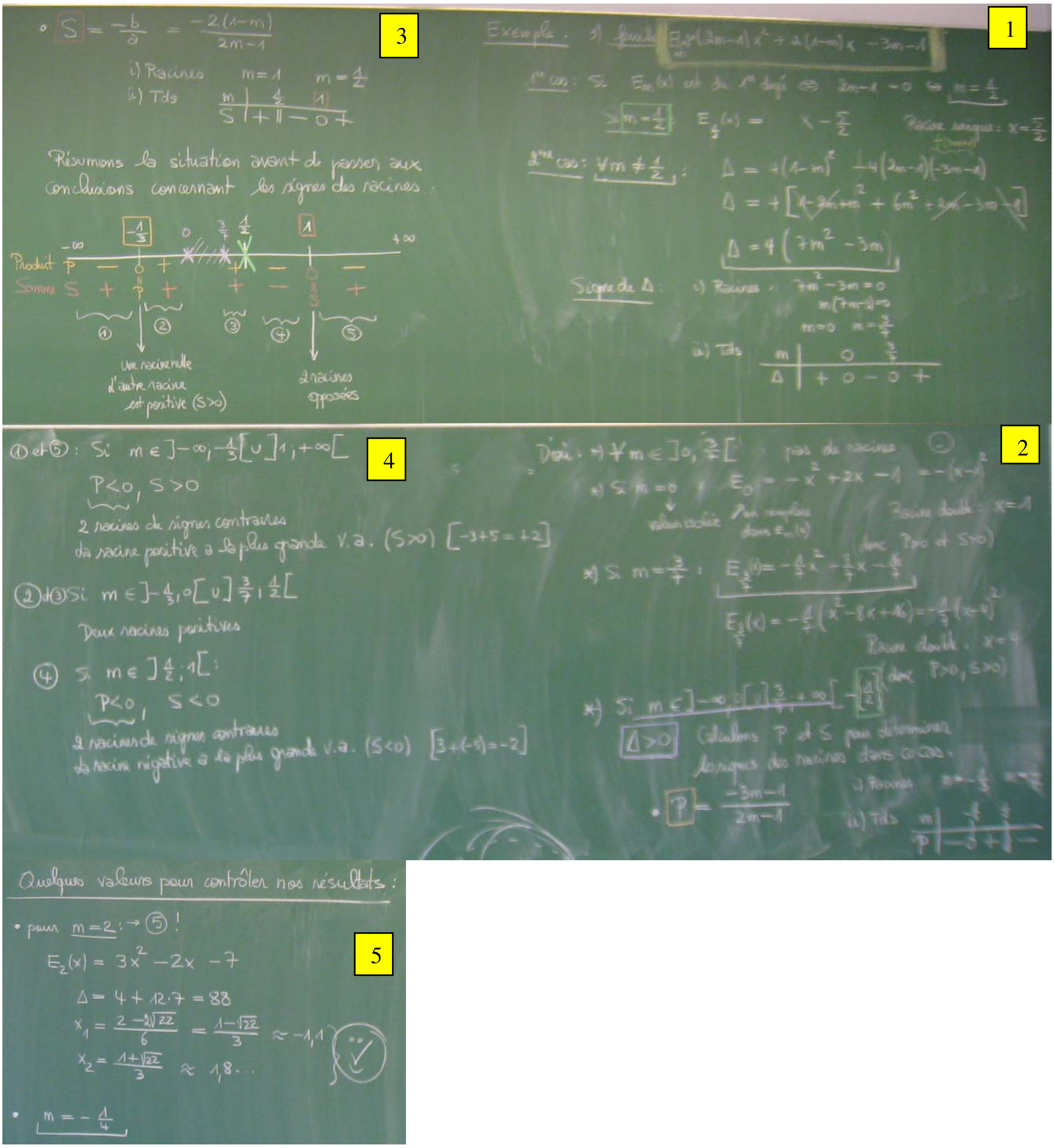
3) $T(x) = (2m+1)x^2 + (m-3)x - m + 3$

4) $T(x) = (m-3)x^2 - 2(2m+1)x + m - 2$

Exercices résolus en classe

Déterminez le nombre et les signes des racines de cette expression suivant la valeur du paramètre *m*, avec :

1) $E_m(x) = (2m-1)x^2 + 2(1-m)x - 3m - 1$ *Résolution au tableau* ↓



Résumé de la situation sous forme de tableau

m	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{3}{7}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$\Delta = 4\left(7m^2 - 3m\right)$	+	+	+	+	0	−	0	+	$\|\|$	+	+	+	+
$P = \frac{-3m-1}{2m-1}$	−	−	0	+	+	$\|\|$	+	+	$\|\|$	−	−	−	−
$S = \frac{-2(1-m)}{2m-1}$	+	+	+	+	+	$\|\|$	+	+	$\|\|$	−	0	+	+
Conclusions		$\boxed{1}$	$x_1 = 0$ $x_2 > 0$	$\boxed{2}$	$x_1 = x_2$ $= 1$	pas de racine	$x_1 = x_2$ $= 4$	$\boxed{3}$	$x = \frac{5}{2}$	$\boxed{4}$	*racines opposées* $x_1 = 2$ $x_2 = -2$	$\boxed{5}$	

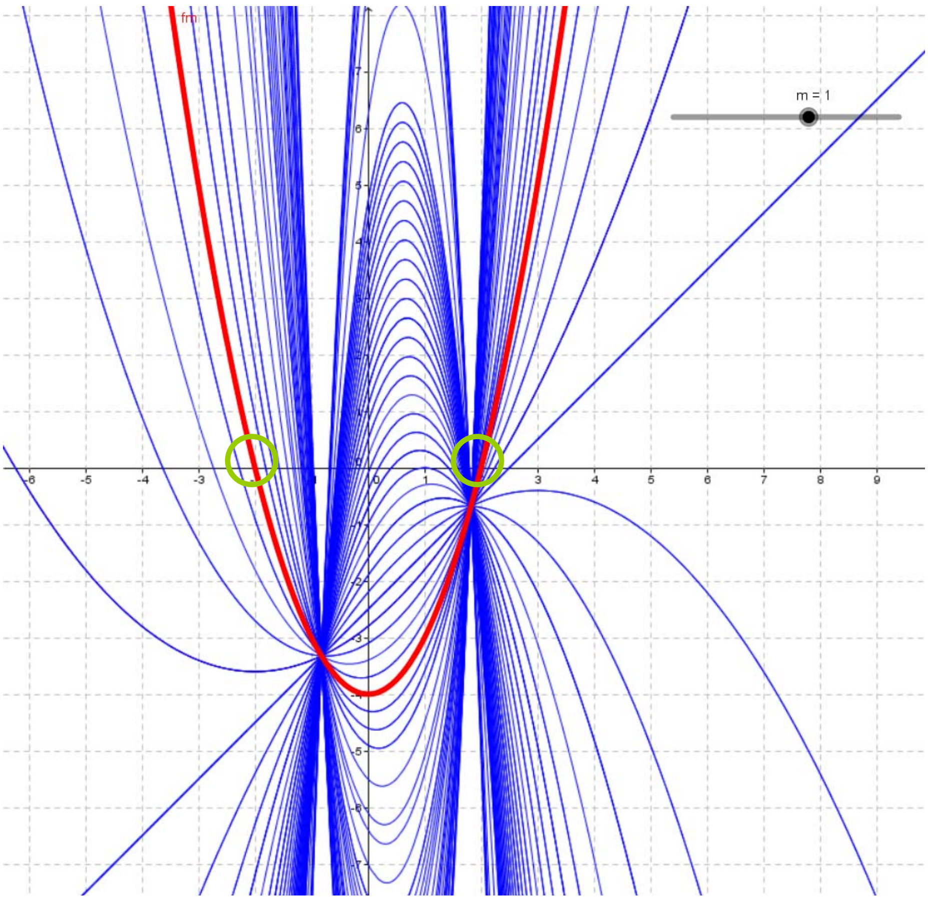
Pour les valeurs particulières de *m*, on remplace cette valeur dans l'expression générale et on calcule la racine en question.

Pour $m = \frac{1}{2}$: $\quad E_{\frac{1}{2}}(x) = \left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)x^2 + 2\left(1 - \frac{1}{2}\right)x - 3 \cdot \frac{1}{2} - 1 = x - \frac{5}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{2}$ *racine*

Pour $m = 1$: $\quad E_1(x) = x^2 - 4 \quad$ *donc* : $\quad x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ *ou* $x = 2$

Illustration graphique

On voit sur le graphe rouge (*parabole*), que les racines (= *abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des x*) sont : $x = -2$ et $x = 2$



Quelques exercices extraits du Livre Bielen IV B (1977)

Il s'agit ici d'exercices échelonnés, c.-à-d. des exercices qui ne sont pas aussi longs que les derniers traités en classe qui avaient renfermé une discussion complète portant sur le nombre et les signes des racines en faisant varier la valeur du paramètre *m*. Leur degré de difficulté est censé être croissant.

Remarque : *Si vous trouvez une « petite erreur » dans la donnée de l'exercice – elle est copiée telle quelle du livre - , signalez en quoi consiste cette erreur.*

Exercice 1 Démontrez que les expressions suivantes ont deux racines distinctes, quelle que soit la valeur de *m* :

1) $E_m(x) = mx^2 + (3m-2)x + (2m-3)$

2) $E_m(x) = x^2 - (2m+1)x + m - 5$

3) $E_m(x) = (m-2)x^2 + 2(m+3)x + m + 8$

Exercice 2 Démontrez que les expressions suivantes ont une racine double :

1) $E_m(x) = x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 4m + 4$

2) $E_m(x) = (2m-3)^2 \cdot x^2 - (2m-3)x + \frac{1}{4}$

Exercice 3 Démontrez que les expressions suivantes n'ont pas de racine :

1) $E_m(x) = 9x^2 - 6mx + m^2 + 4$

2) $E_m(x) = x^2 + (2m-3)x + m^2 - 3m + 5$

3) $E_m(x) = x^2 + (m+2)x + m^2 + m + 3$

Exercice 4 Déterminez *m* pour que les expressions suivantes aient deux racines distinctes :

1) $E_m(x) = 2x^2 - 5x + m$

2) $E_m(x) = mx^2 - (2m+3)x + m + 4$

3) $E_m(x) = (m+1)x^2 + 2(m+2)x + m - 2$

Pour aller plus loin :

- deux racines distinctes positives
- deux racines distinctes de signes contraires
- deux racines distinctes opposées
- deux racines distinctes dont la somme est positive
- deux racines distinctes de signes contraires dont la somme est négative

Exercice 5 Déterminez *m* pour que les expressions suivantes aient une racine double :

1) $E_m(x) = 4x^2 - 4(m+2)x + 9m$

2) $E_m(x) = \left(m^2 - 3m + 6\right)x^2 + 2(m-4)x + 1$

Exercice 6 Déterminez *m* pour que les expressions suivantes n'aient pas de racine :

1) $E_m(x) = x^2 - 6x - m + 5$

2) $E_m(x) = (3m+4)x^2 + 2(3m+2)x + 3m + 12$

Exercice 7 Pour quelles valeurs de m , les expressions suivantes ont-elles deux racines de signes opposés ?

1) $E_m(x) = 3x^2 + (5m-2)x + m - 4$

2) $E_m(x) = -2x^2 + 5mx - 3m + 7$

3) $E_m(x) = (2m-5)x^2 + (m-3)x + 2$

4) $E_m(x) = (2m-3)x^2 - 7mx + m - 4$
