Le théorème de l'Hospital

A Rappels et mise en matière

Exemple de mise en matière Calculons la limite suivante: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

Il s'agit d'une forme indéterminée de la forme "$\dfrac{0}{0}$".

Pour lever cette indétermination, nous avons vu que nous pouvons amplifier la fraction en multipliant numérateur et dénominateur par le même facteur non nul $(1+\cos x)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x\cdot(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin x\cdot(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin x\cdot(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{(1+\cos x)}=\frac{0}{2}=0$$

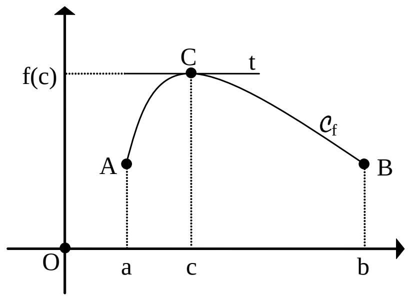
Par conséquent, cette limite existe.

Par la suite, nous allons démontrer un théorème (le théorème de l'Hospital) qui nous permet de calculer ce type d'indéterminations d'une manière plus simple.

Pour arriver au théorème de l'Hospital, nous devons nous référer à deux autres théorèmes très importants, le théorème de Rolle et le théorème de Lagrange ou encore désigné par théorème des accroissements finis. Ils ont été énoncés et démontrés dans le document « *ApplicationsDérivées-CoursBCD* », mais nous allons répéter leurs énoncés., ainsi que les illustrations qui les caractérisent.

Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifiant $f(a)=f(b)$.
Il existe alors (au moins) un réel $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$

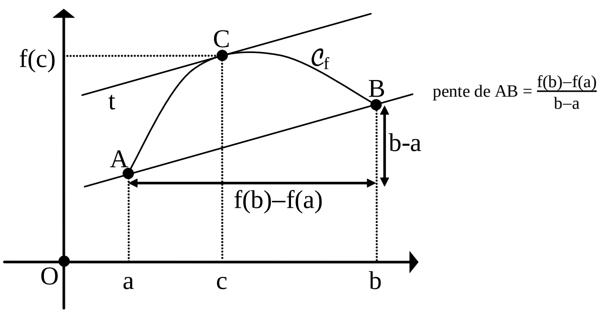


Théorème des accroissements finis

Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé $I=[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$, alors il existe au moins un nombre $c\in]a;b[$ telle que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$$



B Le théorème de l'Hospital

Revenons à notre exemple d'introduction: *Calculons la limite suivante*: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

En généralisant nos réflexions:

Sachant que $f(x_0)=g(x_0)=0$, essayons tout de même de calculer la limite indéterminée $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Amplifions à cet effet l'expression par le facteur $\dfrac{1}{x-x_0}$, avec $x\neq x_0$:

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)}{x-x_0}}$. Comme $f(x_0)=g(x_0)=0$, nous pouvons sans problème ajouter $f(x_0)$ et $g(x_0)$

de sorte à obtenir l'expression: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}$

Si les fonctions f et g sont dérivables en x_0, on obtient par application de la définition d'une fonction dérivable en un point: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$, sous la condition que $g'(x_0)\neq 0$.

D'où une **première version de la règle de l'Hospital**♥ que nous allons généraliser par la suite:

> Si f et g sont deux fonctions dérivables en x_0, s'annulant en x_0 et telles que le quotient $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ soit défini, alors $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

Cette première règle se généralise toutefois à des situations nettement moins restrictives.

♥ Guillaume François Antoine de l'Hospital (1661-1704) extraits de *Wikipedia* et du livre *Analyse* de *Swokowsky* 5e éd.

La règle porte le nom d'un noble français du XVIIe siècle, Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital (1661 - 1704), qui a publié la règle dans son livre *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696), le premier livre de calcul différentiel à avoir été écrit en français.

Ce théorème est d'une triste actualité …

*La règle qui porte son nom est sans doute due à son professeur , le mathématicien suisse **Jean Bernoulli (1661-1748)**, qui lui avait fait part de ce résultat en 1694. En effet L'Hôpital payait à Bernoulli une pension de 300 francs par an pour le tenir informé des progrès du calcul infinitésimal, et pour résoudre les problèmes qu'il lui posait (comme celui de trouver la limite des formes indéterminées) ; de plus, ils avaient signé un contrat autorisant L'Hôpital à utiliser les découvertes de Bernoulli à sa guise. Quand L'Hôpital publia son livre, il reconnut ce qu'il devait à Bernoulli, et, ne voulant pas se voir attribuer son travail, publia anonymement. Bernoulli prétendit alors être l'auteur de l'ouvrage entier, ce qui fut longtemps cru, mais la règle n'en fut pas moins nommée d'après L'Hôpital, bien qu'il n'ait jamais prétendu l'avoir inventée.*

- Généralisation à des fonctions pour lesquelles $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ n'existe pas forcément.
- Généralisation à des fonctions dont la limite en x_0 est infinie.
- Généralisation de la règle à des limites à l'infini.

<u>Théorème</u> : **<u>Règle de l'Hospital-Bernoulli</u>**

Soient *f* et *g* deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert $]a,b[$ contenant *c*, sauf peut-être en *c* lui-même.
Si $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ présente une indétermination de la forme "$\dfrac{0}{0}$" ou "$\dfrac{\infty}{\infty}$" en *c* et si $g'(x)\neq 0$ pour $x\neq c$,
alors : $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$, à condition que $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou que $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$

Ces démonstrations étant assez longues et partiellement assez compliquées, nous nous référons à des livres d'analyse qui les renferment (du moins partiellement), comme le livre ***Analyse*** de ***Swokowsky*** (5e édition) (De Boeck-Université) pp. 492-495.

Remarques importantes

R 1) La règle de l'Hospital est parfois mal utilisée : il ne s'agit pas de dériver le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ mais de dériver séparément $f(x)$ et $g(x)$, de former le quotient $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ de ces dérivées et d'en prendre ensuite la limite.

R 2) Il est extrêmement important, avant d'appliquer la règle de l'Hospital, de vérifier que le quotient donné est de la forme indéterminée "$\dfrac{0}{0}$" ou "$\dfrac{\infty}{\infty}$". En effet, si ce n'est pas le cas, le résultat obtenu peut être incorrect.

R 3) Il est parfois nécessaire d'appliquer la règle de l'Hospital à plusieurs reprises dans le même exercice (cf Ex : 330 – 12)) du livre ! (N'y perdez pas patience !)

R 4) Cette règle est aussi valable pour des limites unilatérales (uniquement des dérivées à gauche par exemple)

R 5) Cette règle est une règle qui est surtout intéressante lors du calcul de limites de fonctions assez compliquées, notamment celles que vous allez voir en classe de 1ere. C'est pourquoi, certaines remarques se rapportent plutôt à ce type de fonctions.

R 6) Parfois il faut simplifier algébriquement une expression, car la simple application répétée de la règle de l'Hospital reproduirait indéfiniment cette indétermination, comme le montre l'exemple **Ex. 330 – 8) du livre EM5.6** ou cet exemple pour une classe de 1ere :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{\boxed{H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{x}} \overset{\boxed{H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{x}} \overset{\boxed{H}}{=} \dots .$$

Corollaire

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert $]a,b[$ contenant c, sauf peut-être en c lui-même.
Si $f(x)\cdot g(x)$ présente une indétermination de la forme "$0\cdot\infty$" en c et si $g'(x)\neq 0$ pour $x\neq c$, alors on transcrit le produit $f(x)\cdot g(x)$ sous la forme : $\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ pour obtenir une forme indéterminée de la forme recherchée dans la règle de l'Hospital.

Remarque : Le mauvais choix du facteur passant au dénominateur peut mener à une expression plus compliquée que celle du départ, comme le montre de nouveau un exemple de la classe de 1^{ere} :

$$\lim_{x\to 0^+}\left[x^2\cdot\ln x\right] \overset{\substack{\text{mauvais}\\\text{choix}}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{(\ln x)^{-1}} \overset{\boxed{H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{-(\ln x)^{-1}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\left[-2x^2\cdot(\ln x)^2\right]$$

$$\overset{\substack{\text{bon}\\\text{choix}}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-2}} \overset{\boxed{H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{-2x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{-2} = 0$$

C Exercices d'application de ce théorème

Les exercices que nous allons présenter sont extraits du livre EM 5.6 , chapitre 6.6

6.6

330. Calcule en utilisant la règle de l'Hospital et après avoir vérifié la légitimité de cette utilisation :

1) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 4}{1 - 2x^2 + x}$

2) $\lim\limits_{1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 - 5x^2 + 4x - 1}$

3) $\lim\limits_{0} \dfrac{\sin 2x}{\tan 4x}$

4) $\lim\limits_{0} \dfrac{x - \tan x}{x^3}$

5) $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 3x}{x - \dfrac{\pi}{2}}$

6) $\lim\limits_{0} \dfrac{\tan x - x}{\sin x - x}$

7) $\lim\limits_{0} \dfrac{\cos 2x - \cos 5x}{\cos 3x - \cos x}$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x \sin 3x}{1 - \cos 3x}$

9) $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$

10) $\lim\limits_{0} \left(\dfrac{3}{2x} - \dfrac{1}{\sin 2x} \right)$

11) $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}} (2x - \pi) \tan x - 2$

12) $\lim\limits_{0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x} \right)$

6.6

339. Calcule en utilisant la règle de l'Hospital et après avoir vérifié la légitimité de cette utilisation :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin 4x - \sin 3x}$

2) $\lim\limits_{+\infty} x^3 \left(1 - \cos \dfrac{2}{x} \right)$

3) $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}} (2x - \pi) \,.\, \tan x$

4) $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - \sin \dfrac{\pi}{7}}{x - \dfrac{\pi}{7}}$

5) $\lim\limits_{0} \dfrac{x^2}{1 - \cos 4x}$

6.6

369. Montre que les limites suivantes ne peuvent pas être calculées par la règle de l'Hospital.

Calcule ensuite ces limites par un autre procédé :

1) $\lim\limits_{0} \dfrac{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}{\sin x}$ 2) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$

Attention, certains de ces exercices peuvent être assez longs ! De temps en temps il vous faut de la patience et de la persévérance dans vos calculs.

Les solutions manuscrites à ces exercices du livre

330 Règle de l'Hospital

1) ✓ $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{3x^2-5x+4}{-2x^2+x-1} \overset{(H)}{=} \lim\limits_{+\infty} \dfrac{6x-5}{-4x+1} \overset{(H)}{=} \lim\limits_{+\infty} \dfrac{6}{-4} = -\dfrac{3}{2}$

2) ✓ $\lim\limits_{1} \dfrac{x^3-3x+2}{2x^3-5x^2+4x-1} \overset{(H)}{=} \lim\limits_{1} \dfrac{3x^2-3}{6x^2-10x+4} \overset{(H)}{=} \lim\limits_{1} \dfrac{6x}{12x-10} = \dfrac{6}{2} = 3$

3) ✓ $\lim\limits_{0} \dfrac{\sin 2x}{\tan 4x} \overset{(H)}{=} \lim\limits_{0} \dfrac{2\cos 2x}{4\cdot(1+\tan^2 4x)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

le cas échéant, utiliser encore (H)

4) ✓ $\lim\limits_{0} \dfrac{x-\tan x}{x^3} \overset{(H)}{=} \lim\limits_{0} \dfrac{1-1-\tan^2 x}{3x^2} = \lim\limits_{0} \dfrac{-\tan^2 x}{3x^2} = \lim\limits_{0} \dfrac{-1}{3}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^2 = -\dfrac{1}{3}$

5) ✓ $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 3x}{x-\frac{\pi}{2}} \overset{(H)}{=} \lim\limits_{\frac{\pi}{2}} \dfrac{-3\sin 3x}{1} = (-3)\cdot(-1) = 3$

6) ✓ $\lim\limits_{0} \dfrac{\tan x - x}{\sin x - x} \overset{(H)}{=} \lim\limits_{0} \dfrac{(1+\tan^2 x-1)}{\cos x - 1} = \lim\limits_{0} \dfrac{\tan^2 x}{\cos x - 1}$

$\overset{(H)}{=} \lim\limits_{0} \dfrac{2\tan x(1+\tan^2 x)}{-\sin x} = \lim\limits_{0} \dfrac{2\cdot(1+\tan^2 x)}{-\cos x} = \dfrac{2}{-1} = -2$

7) ✓ $\lim\limits_{0} \dfrac{\cos 2x - \cos 5x}{\cos 3x - \cos x} \overset{(H)}{=} \lim\limits_{0} \dfrac{-2\sin 2x + 5\sin 5x}{-3\sin 3x + \sin x}$

$\overset{(H)}{=} \lim\limits_{0} \dfrac{-4\cos 2x + 25\cos 5x}{-9\cos 3x + \cos x} = \dfrac{-4+25}{-9+1} = \dfrac{21}{-8} = -\dfrac{21}{8}$

8) ✓ $\lim\limits_{0} \dfrac{3x\sin 3x}{1-\cos 3x} \overset{(H)}{=} \lim\limits_{0} \dfrac{3\sin 3x + 9x\cos 3x}{3\sin 3x}$

$= \lim\limits_{0} \left(1 + \dfrac{3x\cos 3x}{\sin 3x}\right)$

$= 1 + \lim\limits_{0} \dfrac{3x\cos 3x}{\sin 3x}$

$\overset{(H)}{=} 1 + \lim\limits_{0} \dfrac{3\cos 3x - 9x\sin 3x}{3\cos 3x} = 1+1 = 2$

9) ✓ $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x} \overset{(H)}{=} \lim\limits_{\frac{\pi}{2}} \dfrac{+\cos x}{+2\cos x\sin x} = \dfrac{1}{2}$

10) ✓ $\lim\limits_{0} \left(\dfrac{3}{2x} - \dfrac{1}{\sin 2x}\right) = \lim\limits_{0} \dfrac{3\sin 2x - 2x}{2x\sin 2x}$

$\overset{(H)}{=} \lim\limits_{0} \dfrac{-6\cos 2x - 2}{2\sin 2x + 4x\cos 2x} = \pm\infty$

11) √ $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}} \left[(2x-\pi)\tan x - 2 \right] = -4$ "$0\cdot\infty$" donc Hospital ne s'applique pas !

mais : $\tan x = \dfrac{1}{\cot g\, x}$

$$= \lim_{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\overbrace{(2x-\pi)}^{\to 0}}{\underbrace{\cot g\, x}_{\to 0}} - 2 \right]$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2}{-1-\underbrace{\cot g^2 x}_{\to 0}} - 2 \right] = -2-2 = -4$$

12) √ $\lim\limits_{0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x} \right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\overbrace{\sin^2 x - x^2}^{\to 0}}{\underbrace{x^2 \sin^2 x}_{\to 0}}$

$$= \lim_{0} \left[\frac{\overbrace{\sin^2 x}^{\to 1}}{x^2 \sin^2 x} - \frac{x^2}{x^2 \sin^2 x} \right]$$

$$= \lim_{0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = 0$$

le raisonnement est faux ! On ne peut pas ne faire passer à la limite qu'une partie d'une expression !

$$\overset{(H)}{=} \lim_{0} \frac{2\sin x \cos x - 2x}{2x\sin^2 x + x^2 \cdot 2\sin x \cos x}$$

$$= \lim_{0} \frac{\overbrace{\sin 2x - 2x}^{\to 0}}{\underbrace{2x\sin^2 x + x^2 \sin 2x}_{\to 0}}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{0} \frac{2\cos 2x - 2}{2\sin^2 x + 4x \sin x \cos x + 2x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x}$$

$$= \lim_{0} \frac{\overbrace{\cos 2x - 1}^{\to 0}}{\underbrace{\sin^2 x}_{\to 0} + \underbrace{2x \sin 2x}_{\to 0} + \underbrace{x^2 \cos 2x}_{\to 0}}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{0} \frac{-2\sin 2x}{\sin 2x + 4x\cos 2x + 2\sin 2x + x^2(-2\sin 2x) + 2x\cos 2x}$$

$$= \lim_{0} \frac{\overbrace{-2\sin 2x}^{\to 0}}{\underbrace{(3-2x^2)\sin 2x}_{\to 0} + \underbrace{6x\cos 2x}_{\to 0}}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{0} \frac{-4\cos 2x}{-4x\sin 2x + 2(3-2x^2)\cos 2x + 6\cos 2x - 2\cdot 6x \sin 2x}$$

$$= \lim_{0} \frac{\overbrace{-4\cos 2x}^{\to -4}}{\underbrace{-16x\sin 2x}_{\to 0} + \underbrace{(12-\underbrace{4x^2}_{\to 0})\cos 2x}_{\to 12}}$$

$$= \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

Pourquoi faut-il utiliser 4× (H) ? Développement en série :

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$

$\Rightarrow$ En élevant au carré,