Chapitre 3	Systèmes linéaires

Table des matières

Résolution de systèmes linéaires 2
Ecriture matricielle d'un système 2
Interprétation géométrique 3
Résolution d'un système 3x3 5
Méthode 1 – par substitution 5
Méthode 2 – par combinaison linéaire 5
Méthode 3 – méthode de Gauss ou méthode du pivot 5
Méthode 4 – méthode de Cramer 6
Exemples 6
Formules de Cramer 9
Système 2x2 9
Système 3x3 9
Exercices corrigés 10

Chapitre 15	**Systèmes linéaires – EM56**
Cours	15.1 Méthodes générales de résolution 15.2 Système de Cramer 15.3 Discussion
Exercices	**786, 787, 797, 798**
Ex. pour s'autocontrôler	**799**

Chapitre 3	Systèmes linéaires

Espace Math 56 *(De Boeck) –* ***pages 294-309***

Résolution de systèmes linéaires

Un système d'équations **linéaires** est composé de plusieurs équations du type :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

où a_i et b sont des nombres réels et les x_i sont les **variables** (aussi appelés **inconnues**).

Exemple

$$(\mathcal{S}) \equiv \begin{cases} 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 5 \\ 5x_2 - 4x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$$

Système de trois équations à trois variables

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}}_{B}$$

Ecriture matricielle du système $(\mathcal{S})$

Ecriture matricielle d'un système

Pour exprimer le système $(\mathcal{S})$ sous forme matricielle, on écrit $A \cdot X = B$, où :

$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est la ***matrice des coefficients***,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ est la ***matrice des variables*** et

$B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ est la ***matrice des constantes***.

Remarques

- Le système $(\mathcal{S})$ est un système de 3 équations linéaires à 3 variables (système 3x3).
- Beaucoup de calculatrices qui résolvent ce genre de problème (comme la Casio fx-991) demandent qu'on leur donne les coefficients sous forme matricielle.
- Il faut être prudent lorsqu'on traduit un système d'équations sous forme matricielle !
  On doit bien respecter l'ordre d'apparition des coefficients et des variables.
  Soit, par exemple, le système :

$$(\mathcal{S}_1) \equiv \begin{cases} 3x - 4z + y = -7 \\ x - 5 = 2y - 8z \\ 6x + 4y - x + 2z - 1 = -1 \end{cases}$$

  Sa traduction sous forme matricielle est donnée par :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 8 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

Résoudre un système de trois équations linéaires à trois variables (inconnues) signifie rechercher l'intersection de trois plans de l'espace. Il s'agit donc de déterminer l'ensemble des points de l'espace que les trois plans donnés ont en commun.

La problématique est grosso-modo similaire au problème de la détermination de l'**intersection de deux droites dans le plan** :

- Soit il y a une solution unique constituée d'un point ⇔ droites sécantes
- Soit il n'y a pas de solution unique ⇔ droites parallèles (disjointes)
- Soit il y a une infinité de solutions ⇔ droites confondues

Si dans le plan, la problématique d'inexistence de solution unique se résumait à deux cas possibles - droites disjointes et droites confondues - ceci se complique lors du passage dans l'espace. Comme la dimension n'est plus 2 mais 3, le nombre de cas possibles augmente. En plus, il est plus difficile de se les représenter, car la représentation dans l'espace est autrement plus complexe. Cette résolution prend une nouvelle "coloration": l'interprétation géométrique de l'ensemble des solutions. C'est ainsi que pour un système de trois équations du premier degré à trois inconnues

$$(\mathcal{S}) \equiv \begin{cases} \boldsymbol{a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0} & (plan\ P_1) \\ \boldsymbol{a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0} & (plan\ P_2) \\ \boldsymbol{a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0} & (plan\ P_3) \end{cases}$$

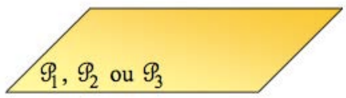
les solutions du système sont les points communs aux trois plans $\boldsymbol{P_1, P_2}$ et $\boldsymbol{P_3}$: $\boldsymbol{S = P_1 \cap P_2 \cap P_3}$

Interprétation géométrique

Intersection de 3 plans dans l'espace – répertoire des différents cas de figure possibles :

Les plans $\boldsymbol{P_1}$, $\boldsymbol{P_2}$ et $\boldsymbol{P_3}$ sont confondus.

L'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ est le plan P_1 qui est aussi le plan P_2 et le plan P_3.
Le système $(\mathcal{S})$ admet une infinité de solutions.
Les trois équations du système sont proportionnelles. Il s'agit de trois équations d'un même plan.

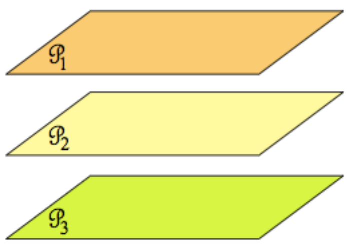


$\boldsymbol{S = P_1 = P_2 = P_3}$

(une infinité de solutions)

Les plans $\boldsymbol{P_1}$, $\boldsymbol{P_2}$ et $\boldsymbol{P_3}$ sont parallèles et non confondus.

L'intersection des trois plans est l'ensemble vide.
Le système $(\mathcal{S})$ n'admet aucune solution.
Dans ce cas, les vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ et $\overrightarrow{n_3}$ des trois plans sont colinéaires.
Seuls les coefficients $(a_1; b_1; c_1)$, $(a_2; b_2; c_2)$ et $(a_3; b_3; c_3)$ sont proportionnels car les trois équations se rapportent à trois plans non confondus.

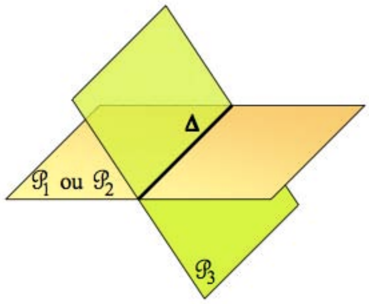


$\boldsymbol{S = \emptyset}$

(aucune solution)

Les plans P_1 et P_2 sont confondus et le plan P_3 est sécant.

L'intersection des trois plans est une droite Δ.
Le système $(\mathcal{S})$ admet une infinité de solutions.
Les deux premières équations des plans P_1 et P_2 sont proportionnelles. Par contre, les coefficients $(a_3; b_3; c_3)$ ne sont proportionnels ni à $(a_1; b_1; c_1)$, ni à $(a_2; b_2; c_2)$; ceci car le vecteur normal $\overrightarrow{n_3}$ n'est colinéaire ni à $\overrightarrow{n_1}$, ni à $\overrightarrow{n_2}$.

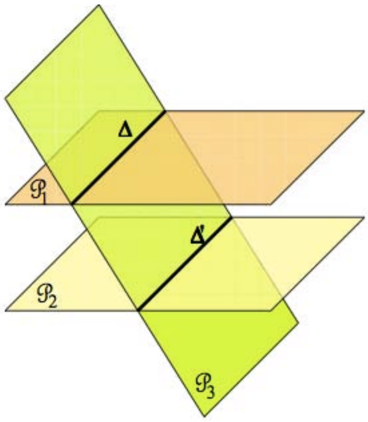


$\boldsymbol{S = \Delta}$

(une infinité de solutions)

Les plans P_1 et P_2 sont parallèles distincts et le plan P_3 leur est sécant.

Le système $(\mathcal{S})$ n'admet aucune solution.
Dans ce cas, seuls les vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont colinéaires et donc seuls les coefficients $(a_1; b_1; c_1)$ et $(a_2; b_2; c_2)$ sont proportionnels.



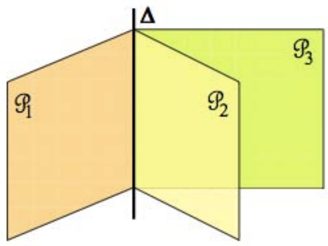
$\boldsymbol{S = \emptyset}$

(aucune solution)

Dans les cas suivants, il n'y a plus proportionnalité entre les coefficients des équations en x; y et z.

Les plans P_1 , P_2 et P_3 sont sécants suivants une même droite Δ.

L'intersection des trois plans est une droite.
Le système $(\mathcal{S})$ admet une infinité de solutions.
On peut voir les choses de la manière suivante : les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite Δ qui est incluse dans le plan P_3.

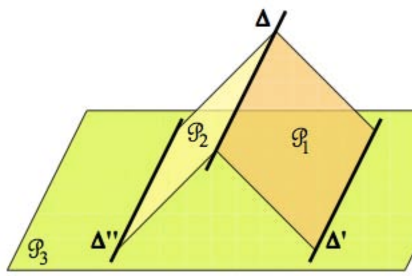


$\boldsymbol{S = \Delta}$

(une infinité de solutions)

Les plans P_1, P_2 et P_3 sont deux à deux sécants mais suivant trois droites parallèles distinctes Δ, Δ' et Δ''.

L'intersection des trois plans est vide.
Le système $(\mathcal{S})$ n'admet aucune solution.
On peut voir les choses de la manière suivante : les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite Δ qui est parallèle au plan P_3 sans y être incluse.

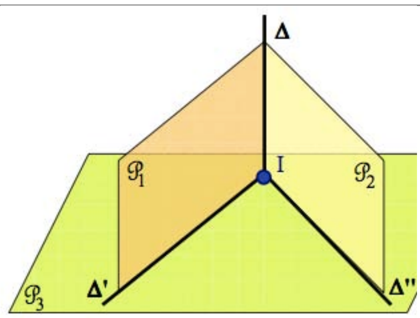


$\boldsymbol{S = \emptyset}$

(aucune solution)

Les plans P_1 , P_2 et P_3 sont sécants et leur intersection est un point I.

Le système $(\mathcal{S})$ admet alors une seule solution et se résout classiquement par la méthode du pivot de Gauss (par substitution) ou par les formules de Cramer. Les trois droites d'intersection Δ, Δ' et Δ'' sont sécantes en I.



$\boldsymbol{S = \{I\}}$

(un point)

Résolution d'un système 3x3

$$(\mathcal{S}) \equiv \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 & (plan\ P_1) \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 & (plan\ P_2) \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 & (plan\ P_3) \end{cases}$$

$(\mathcal{S})$ est un système de 3 équations linéaires à 3 variables.
Pour résoudre un tel système, on dispose de quatre méthodes :

Méthode 1 – par substitution

Cette méthode consiste à isoler une des trois variables (x, y ou z), puis à substituer sa valeur dans les deux autres équations. Ceci mène à un système de 2 équations à 2 inconnues qu'on sait résoudre depuis la classe de 4ème. *(Voir exemple 1 ci-dessous et **EM56 page 299-300**)*

Méthode 2 – par combinaison linéaire

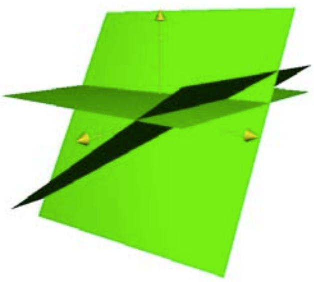
Cette méthode consiste à additionner un multiple d'une ligne au multiple d'une autre ligne. Les coefficients multiplicatifs devront été choisis de façon à obtenir une nouvelle équation où au moins une variable aura été éliminée. *(Voir exemple 1 ci-dessous et **EM56 page 301-304**)*

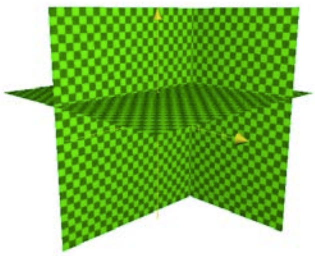
Méthode 3 – méthode de Gauss ou méthode du pivot

Cette méthode consiste à transformer un système quelconque en un système équivalent (c.-à-d. ayant les mêmes solutions) **échelonné**, c'est-à-dire dans lequel le nombre de variables décroît strictement quand on passe d'une ligne à la suivante. De manière imagée, on part d'un système rectangulaire et on arrive à un système triangulaire. *(Voir exemple 1 ci-dessous et **EM56 page 301-304**)*

En effet, il est facile de résoudre un système échelonné :

$$(\mathcal{S}) \equiv \begin{cases} 8x + y + 4z = 5 \\ \quad 2y - 3z = 4 \\ \qquad 4z = 8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases}$$





Algorithme de la méthode de Gauss

- On cherche une ligne où le **coefficient a_i de x est non nul** et « sympathique » (de préférence égal à 1). On note cette ligne L_i .
- On permute les lignes 1 et i de façon à mettre la ligne « sympathique » en haut du système : $L_1 \leftrightarrow L_i$, puis on choisit le nouveau coefficient a_1 comme premier pivot.
- On utilise la nouvelle ligne L_1 pour éliminer les coefficients de x dans les lignes suivantes.
  Par exemple, **si à la ligne L_2 le coefficient de x est a_2, on effectue $L_2 \to L_2 - \frac{a_2}{a_1} L_1$**
- On reprend ensuite les étapes de l'algorithme en travaillant sur toutes les lignes *(sauf la première)* de manière à éliminer y.
- Enfin, on exprime les solutions.

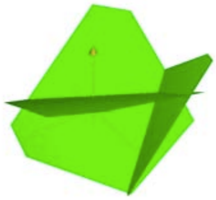
Méthode 4 – méthode de Cramer

Voir « Formules de Cramer » page 9 et EM56 pages 301-304.

Exemples

Exemple 1

Résoudre le système : $(\mathcal{S}) \equiv \begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 3x+2y-3z=8 \\ 2x-y-z=15 \end{cases}$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}}_{B}$



Il s'agit de trois équations de plans dans l'espace.

<table>
<tr><th>Substitution</th><th>Combinaison linéaire</th><th>Méthode du pivot de Gauss</th></tr>
<tr>
<td>$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 3x+2y-3z=8 \\ 2x-y-z=15 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2y-3z \\ 3x+2y-3z=8 \\ 2x-y-z=15 \end{cases}$</td>
<td>$\begin{cases} x+2y+3z=4 & L_1 \\ 3x+2y-3z=8 & L_2 \to L_2-3L_1 \\ 2x-y-z=15 & L_3 \to L_3-2L_1 \end{cases}$
On décide d'éliminer (par exemple) la variable x :</td>
<td>On commence par écrire le tableau des coefficients du système $(\mathcal{S})$.
$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 2 & 3 & 4 & L_1 \\ 3 & 2 & -3 & 8 & L_2 \to L_2-3L_1 \\ 2 & -1 & -1 & 15 & L_3 \to L_3-2L_1 \end{array}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2y-3z \\ 3(4-2y-3z)+2y-3z=8 \\ 2(4-2y-3z)-y-z=15 \end{cases}$</td>
<td>$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=4 & L_1 \\ -4y-12z=-4 & L_2 \to -\frac{1}{4}L_2 \\ -5y-7z=7 & L_3 \end{cases}$</td>
<td>pivot
$\begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & L_1 \\ 0 & -4 & -12 & -4 & L_2 \to -\frac{1}{4}L_2 \\ 0 & -5 & -7 & 7 & L_3 \end{array}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2y-3z \\ \mathbf{y+3z=1} \\ \mathbf{-5y-7z=7} \end{cases}$
Système de 2 équations à 2 inconnues</td>
<td>$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=4 & L_1 \\ y+3z=1 & L_2 \\ -5y-7z=7 & L_3 \to L_3+5L_2 \end{cases}$</td>
<td>$\begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & L_1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 & L_2 \\ 0 & -5 & -7 & 7 & L_3 \to L_3+5L_2 \end{array}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2y-3z \\ y=1-3z \\ -5y-7z=7 \end{cases}$</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2y-3z \\ y=1-3z \\ -5(1-3z)-7z=7 \end{cases}$</td>
<td>$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=4 \\ y+3z=1 \\ 8z=12 \end{cases}$</td>
<td>$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 12 \end{array}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2y-3z \\ y=1-3z \\ 8z=12 \end{cases}$</td>
<td>$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{13}{2} \\ y=-\frac{7}{2} \\ z=\frac{3}{2} \end{cases}$</td>
<td>On en déduit que :
$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+3z=1 \\ 8z=12 \end{cases}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{13}{2} \\ y=-\frac{7}{2} \\ z=\frac{3}{2} \end{cases}$</td>
<td></td>
<td>$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{13}{2} \\ y=-\frac{7}{2} \\ z=\frac{3}{2} \end{cases}$</td>
</tr>
</table>

L'intersection des trois plans est le point $\mathrm{I}\left(\frac{13}{2}; -\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

A retenir

3 principes fondamentaux

On ne change pas les solutions d'un système lorsqu'on :

- **permute 2 lignes**
- **divise par un même nombre non nul les éléments d'une ligne**
- **ajoute ou retranche à une ligne un certain nombre de fois une autre ligne**

Exemple 2

Résoudre le système : $(\mathcal{S}) \equiv \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 12 \\ \quad\quad 3y + 6z = -3 \\ \quad\quad\quad - 5z = 10 \end{cases}$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}}_{B}$

Un tel système échelonné se résout aisément. Voici deux méthodes de résolution :

Première méthode

On calcule z à l'aide de la dernière équation, puis y à l'aide de la deuxième équation et de la valeur de z, puis enfin x à l'aide de la première équation et des valeurs de y et z. On obtient ici :

$z = -\frac{10}{5} = -2$, puis

$y = \frac{1}{3}(-3 - 6z) = \frac{1}{3}(-3 + 12) = 3$, et enfin

$x = \frac{1}{2}(12 - 2y - 2z) = \frac{1}{2}(12 - 6 + 4) = 5.$

Il y a donc une seule solution possible : $(5; 3; -2)$.

Deuxième méthode

On transforme le système $(\mathcal{S})$ en un système équivalent encore plus simple. **Le but est d'obtenir à la fin un système avec des coefficients 1 sur la diagonale et des 0 à la fois en-dessous de la diagonale** *(comme c'est déjà le cas)* **et au-dessus de la diagonale**, appelé **système échelonné réduit**.

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 12 \\ \quad\quad 3y + 6z = -3 \\ \quad\quad\quad - 5z = 10 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 12 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \rightarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \rightarrow -\frac{1}{5}L_3 \end{array}$$

(écriture simplifiée de $(\mathcal{S})$)

On commence par mettre des 1 sur la diagonale.

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \rightarrow L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 \end{array}$$

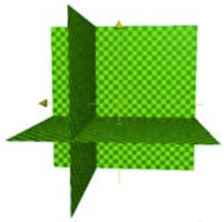
Puis on fait apparaître des 0 au-dessus de la diagonale.

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \rightarrow L_2 - 2L_3 \\ L_3 \rightarrow L_3 \end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

$$\begin{cases} x & & & = 5 \\ & y & & = 3 \\ & & z & = -2 \end{cases}$$



Ce système admet comme solution unique le point $I(5; 3; -2)$, donc : $S = \{(5; 3; -2)\}$

Remarques sur le choix des pivots

- Une colonne qui contient un pivot est appelée une **colonne pivot**.
- **Les pivots sont choisis dans le premier membre du tableau des coefficients.**
- **On ne peut pas choisir un pivot dans une ligne ou une colonne où on a déjà choisi un pivot.**
- Un pivot doit correspondre à un élément non nul du tableau.

Autres remarques

- On ne trouve **pas toujours une solution** : des équations sont parfois contradictoires.
  Par exemple :
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

  Il n'y a pas non plus de solutions quand il y a plus d'équations indépendantes que de variables (d'inconnues). On dit alors que le système est **surdéterminé**.
  Une **équation indépendante** ne peut pas être obtenue en combinant d'autres équations du système.

- Il y a une **infinité de solutions** quand il y a plus de variables (d'inconnues) que d'équations indépendantes. On dit alors que le système est dit **sous-déterminé**.
  Par exemple :
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

  Dans ce cas, il y a une infinité de solutions. Pour exprimer l'ensemble des solutions, on peut choisir la valeur d'une variable arbitrairement, et la valeur de l'autre sera déterminée d'après la valeur de la première :
$$x = \gamma \text{ avec } \gamma \in \mathbb{R}$$
  De la première ligne, on déduit que : $y = 1 - \gamma$

  $\boldsymbol{\gamma}$ n'est pas une inconnue, mais un **paramètre**, c'est-à-dire une valeur que l'on peut choisir arbitrairement. L'ensemble des solutions est donc donné par : $S = \{(\gamma; 1 - \gamma), \gamma \in \mathbb{R}\}$
  Avoir une infinité de solutions ne signifie pas que tout est solution !

  Soient $\boldsymbol{n_v}$ le nombre de **variables** (d'inconnues) et $\boldsymbol{n_e}$ le nombre d'**équations indépendantes**.
  Le nombre $\boldsymbol{n = n_v - n_e}$ est appelé nombre de **degrés de liberté**.

  Si on a deux degrés de liberté, on peut choisir les valeurs de deux variables comme on veut.
  Dans l'exemple ci-dessus, $n = 2 - 1 = 1$ degré de liberté.

Formules de Cramer

Système 2x2

Soit le système d'équations linéaires suivants : $(\mathcal{S}) \equiv \begin{cases} \boldsymbol{a_1x + b_1y = c_1} \\ \boldsymbol{a_2x + b_2y = c_2} \end{cases}$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{c_2} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}}$

Gabriel Cramer

(mathématicien suisse – 1704–1752)

Si $\boxed{\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0}}$,
le système $(\mathcal{S})$ a pour **solution unique le couple** $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ tel que :

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad \textit{Formules de Cramer} \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

En utilisant la notation des déterminants, les **formules de Cramer** s'écrivent :

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} \end{vmatrix}$$

Si $\boxed{\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) \neq \mathbf{0}}$, alors :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{c_1} & b_1 \\ \boldsymbol{c_2} & b_2 \end{vmatrix}}{\det(A)} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \boldsymbol{c_1} \\ a_2 & \boldsymbol{c_2} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{det}(\boldsymbol{A_x})}{\mathbf{det}(\boldsymbol{A})} \qquad \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{det}(\boldsymbol{A_y})}{\mathbf{det}(\boldsymbol{A})}$$

Si $\boxed{\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{a_1b_2 - a_2b_1} = \mathbf{0}}$,
le système $(\mathcal{S})$ ne peut **pas** avoir **de solution <u>ou</u>** avoir **une infinité de solutions.**

Système 3x3

Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$(\mathcal{S}) \equiv \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3} & \boldsymbol{c_3} \end{vmatrix}$$

- Si $\boxed{\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) \neq \mathbf{0}}$, le système admet pour **solution unique le triplet** $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y};\boldsymbol{z})$ tel que :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{d_1} & b_1 & c_1 \\ \boldsymbol{d_2} & b_2 & c_2 \\ \boldsymbol{d_3} & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\det(A)} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \boldsymbol{d_1} & c_1 \\ a_2 & \boldsymbol{d_2} & c_2 \\ a_3 & \boldsymbol{d_3} & c_3 \end{vmatrix}}{\det(A)} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boldsymbol{d_1} \\ a_2 & b_2 & \boldsymbol{d_2} \\ a_3 & b_3 & \boldsymbol{d_3} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{det}(\boldsymbol{A_x})}{\mathbf{det}(\boldsymbol{A})} \qquad \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{det}(\boldsymbol{A_y})}{\mathbf{det}(\boldsymbol{A})} \qquad \boldsymbol{z} = \frac{\mathbf{det}(\boldsymbol{A_z})}{\mathbf{det}(\boldsymbol{A})}$$

- Si $\boxed{\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}}$, le système $(\mathcal{S})$ peut ne **pas** avoir **de solution <u>ou</u>** avoir **une infinité de solutions**.

Pour se souvenir facilement de ces formules, il suffit de remarquer que, au numérateur, **on remplace dans le déterminant principal la colonne de la variable *(inconnue)* par la colonne des constantes**.

Exercices corrigés

Exercice 1 :

Résoudre et interpréter géométriquement les systèmes suivants :

$(\mathcal{S}_1) \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x+y-2z=2 \end{cases}$	$(\mathcal{S}_2) \equiv \begin{cases} 2x+y-z=3 \\ x-2y+3z=4 \\ 3x-y+2z=7 \end{cases}$
$(\mathcal{S}_4) \equiv \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 2x+y-z=5 \\ x-y+2z=2 \end{cases}$	$(\mathcal{S}_3) \equiv \begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x-4y+6z=10 \\ -3x+6y-9z=-15 \end{cases}$
$(\mathcal{S}_5) \equiv \begin{cases} 2x+y-3z=1 \\ x-2y+z=2 \end{cases}$	$(\mathcal{S}_6) \equiv \begin{cases} x-2y=3 \\ 2x+y=2 \\ 3x-y=1 \end{cases}$

Exercice 2 :

Voir exemples EM56 pages 299-303 & 307-309

Solutions – Exercice 1 :

1) $(\mathcal{S}_1) \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x+y-2z=2 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & L_1 \to L_1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 & L_3 \to L_3 - 3L_1 \end{array} \quad \to_1 \quad \begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & L_1 \to L_1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & L_2 \to -\frac{1}{3}L_2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & L_3 \to L_3 \end{array}$$

$$\to_2 \quad \begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & L_1 \to L_1 - L_2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & L_2 \to L_2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & L_3 \to L_3 + 2L_2 \end{array} \quad \to_3 \quad \begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & L_1 \to L_1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & L_2 \to L_2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & L_3 \to -L_3 \end{array}$$

$$\to_4 \quad \begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & L_1 \to L_1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & L_2 \to L_2 + L_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & L_3 \to L_3 \end{array} \quad \to_5 \quad \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}$$

D'où la solution unique :

$$\boldsymbol{S} = \{(\mathbf{1};\mathbf{1};\mathbf{1})\}$$

Interprétation géométrique :

Le système représente les équations cartésiennes de trois plans qui se coupent en un seul **point** $\boldsymbol{I}(\mathbf{1};\mathbf{1};\mathbf{1})$.

2) $(\mathcal{S}_2) \equiv \begin{cases} 2x+y-z=3 \\ x-2y+3z=4 \\ 3x-y+2z=7 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \qquad \to_1 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\to_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -7 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & -5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 \to \frac{1}{5}L_2 \\ L_3 \to L_3 \end{array} \qquad \to_3 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{7}{5} & -1 \\ 0 & 5 & -7 & -5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \to L_1 + 2L_2 \\ L_2 \to L_2 \\ L_3 \to L_3 - 5L_2 \end{array}$$

$$\to_4 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{5} & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{7}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{équation principale} \\ \text{équation principale} \\ \textbf{équation auxiliaire} \end{array}$$

On ne peut plus choisir de pivot.

Les variables qui correspondent aux colonnes pivots sont appelés **variables principales** (ici : x et y). Les autres variables, celles qui correspondent aux colonnes qui ne sont pas des colonnes pivots, sont appelés **variables libres (ou variables auxiliaires)** (ici : z).

$$(\mathcal{S}_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \qquad + \frac{1}{5}z = 2 \\ \quad y - \frac{7}{5}z = -1 \\ \quad \mathbf{0 = 0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \quad 2 - \frac{1}{5}z \\ y = -1 + \frac{7}{5}z \\ \boldsymbol{z} \textbf{ est libre} \end{cases}$$

On exprime les variables principales en fonction des variables libres. Les variables libres peuvent prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}$.

On obtient ainsi une **solution générale paramétrée** qui donne une description explicite de toutes les solutions du **système** dit **simplement indéterminé (car une variable libre)**.

En posant : $\boldsymbol{z = \gamma}$ **avec** $\boldsymbol{\gamma \in \mathbb{R}}$, le système $(\mathcal{S}_2)$ s'écrit :

$$(\mathcal{S}_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = \quad 2 - \frac{1}{5}\gamma} \\ \boldsymbol{y = -1 + \frac{7}{5}\gamma} \\ \boldsymbol{z = \qquad\quad \gamma} \end{cases} \quad (\gamma \in \mathbb{R})$$

D'où les solutions:

$$\boldsymbol{S = \left\{\left(2 - \frac{1}{5}\gamma; -1 + \frac{7}{5}\gamma; \gamma\right) \textbf{ avec } \gamma \in \mathbb{R}\right\}}$$

Interprétation géométrique :

L'intersection de ces trois plans est une **droite passant par** le point $\boldsymbol{A(2;-1;0)}$ et **de vecteur directeur** $\boldsymbol{\vec{u}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$.

En effet : $(\mathcal{S}_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \quad 2 - \frac{1}{5}\gamma \\ y = -1 + \frac{7}{5}\gamma \\ z = \qquad\quad \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -\frac{1}{5}\gamma \\ y + 1 = \quad \frac{7}{5}\gamma \\ z \quad = \quad 1\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \gamma \cdot \vec{u}$

(équation vectorielle d'une droite passant par $A(2;-1;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$)

Remarque

On appelle équation(s) principale(s) le(s) équation(s) du système transformé correspondants aux lignes de pivot. Les autres équations sont appelées **équations auxiliaires**.

3) $(\mathcal{S}_3) \equiv \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - 4y + 6z = 10 \\ -3x + 6y - 9z = -15 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 6 & 10 \\ -3 & 6 & -9 & -15 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 + 3L_1 \end{array} \quad \to_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Comme on ne peut pas choisir davantage de pivot, ce système se réduit à une équation d'un plan de l'espace. Il s'agit d'un **système doublement indéterminé** (**car deux variables libres** : y et z). **Les trois plans sont donc confondus**. Il ne reste plus qu'à déterminer un point et deux vecteurs directeurs de ce plan.

Tout comme dans l'exemple précédent, on exprime la variable de base en fonction des variables libres.

$$(\mathcal{S}_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 3z + 5 \\ \boldsymbol{y \text{ est libre}} \\ \boldsymbol{z \text{ est libre}} \end{cases}$$

En posant : $\boldsymbol{y = \beta}$ **et** $\boldsymbol{z = \gamma}$ **avec** $\boldsymbol{\beta ; \gamma \in \mathbb{R}}$, le système $(\mathcal{S}_3)$ s'écrit :

$$(\mathcal{S}_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 2\beta - 3\gamma + 5} \\ \boldsymbol{y = \ \beta} \\ \boldsymbol{z = \ \gamma} \end{cases} \qquad (\beta ; \gamma \in \mathbb{R})$$

D'où les solutions:

$$\boldsymbol{S = \{(2\beta - 3\gamma + 5 ; \beta ; \gamma) \text{ avec } \beta ; \gamma \in \mathbb{R}\}}$$

Interprétation géométrique :

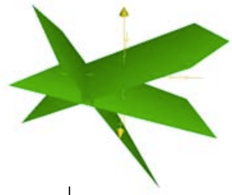
L'intersection de ces trois plans est un **plan passant** par le point $\boldsymbol{A(5;0;0)}$ et **de vecteurs directeurs** $\boldsymbol{\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ **et** $\boldsymbol{\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

En effet :

$$(\mathcal{S}_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\beta - 3\gamma + 5 \\ y = \ \beta \\ z = \ \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 2\beta - 3\gamma \\ y \quad = 1\beta \\ z \quad = \quad 1\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \beta \cdot \vec{u} + \gamma \cdot \vec{v}$$

(équation vectorielle d'un plan passant par $A(5;0;0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.)

4) $(\mathcal{S}_4) \equiv \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 & (P_1) \\ 2x + y - z = 5 & (P_2) \\ x - y + 2z = 2 & (P_3) \end{cases}$



$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{array} \quad \to_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 \to -\frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \to L_3 \end{array}$$

$$\to_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 - 2L_2 \\ L_2 \to L_2 \\ L_3 \to L_3 + 3L_2 \end{array} \quad \to_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Le système $(\mathcal{S}_4)$ s'écrit donc :

$$(\mathcal{S}_4) \Leftrightarrow \begin{cases} x \qquad + \frac{1}{3}z = 2 \\ \qquad y - \frac{5}{3}z = 1 \\ \qquad \mathbf{0 = 1} \qquad \textbf{impossible} \end{cases}$$

L'équation auxiliaire étant impossible, ce système n'admet pas de solution.

D'où la solution:

$$\boldsymbol{S} = \emptyset$$

Interprétation géométrique :

Les trois plans n'ont aucun point en commun.

Les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite Δ qui est parallèle au plan P_3 sans y être incluse.

5) $(\mathcal{S}_5) \equiv \begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$

Comme il n'y a que deux équations pour trois inconnues, le système ne peut pas admettre de solution unique. En particulier, si intersection il y a, il s'agit ou bien de deux plans qui se coupent suivant une droite, ou bien de deux plans qui sont confondus.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \; L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \to_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 \to L_2 - 2L_2 \end{array}$$

$$\to_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 \to \frac{1}{5}L_2 \end{array} \quad \to_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 + 2L_2 \\ L_2 \to L_2 \end{array}$$

$$\to_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{5} \end{array}\right)$$

Variables principales : x et y

Variable libre : $\boldsymbol{z}$ *(système simplement indéterminé)*

$$(\mathcal{S}_5) \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad\quad - z = \frac{4}{5} \\ \quad y - z = -\frac{3}{5} \\ z \text{ est libre} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} + z \\ y = -\frac{3}{5} + z \\ z \text{ est libre} \end{cases}$$

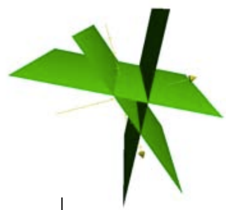
En posant : $z = \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$, le système $(\mathcal{S}_5)$ s'écrit : $(\mathcal{S}_5) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} + \gamma \\ y = -\frac{3}{5} + \gamma \\ z = \quad \gamma \end{cases} \quad (\gamma \in \mathbb{R})$

D'où les solutions:

$$\boldsymbol{S = \left\{ \left(\frac{4}{5} + \gamma ; -\frac{3}{5} + \gamma ; \gamma \right) \text{ avec } \gamma \in \mathbb{R} \right\}}$$

Interprétation géométrique :

L'intersection de ces trois plans est une **droite passant par** le point $\boldsymbol{A\left(\frac{4}{5} ; -\frac{3}{5} ; 0\right)}$ et **de vecteur directeur** $\boldsymbol{\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$**.**



6) $(\mathcal{S}_6) \equiv \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 2 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1 \end{array} \quad \to_1 \quad \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & -8 \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 \to \frac{1}{5}L_2 \\ L_3 \to L_3 \end{array}$$

$$\to_2 \quad \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 5 & 0 & -8 \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \to L_1 + 2L_2 \\ L_2 \to L_2 \\ L_3 \to L_3 - 5L_2 \end{array} \quad \to_3 \quad \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}$$

Le système $(\mathcal{S}_6)$ s'écrit donc :

$$(\mathcal{S}_6) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \\ \mathbf{0 = -4} \quad \textbf{impossible} \end{cases}$$

L'équation auxiliaire étant impossible, ce système n'admet pas de solution.

D'où la solution:

$$\boldsymbol{S = \emptyset}$$

Interprétation géométrique :

Les trois plans n'ont aucun point en commun.

Les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite Δ qui est parallèle au plan P_3 sans y être incluse.