Collection d'exercices sur
La division euclidienne, les nombres premiers, ainsi que PGCD et PPCM

A Rappel important

Retenons: Pour contrôler si un nombre n est premier, il suffit de contrôler:

1) si le nombre n est divisible par des nombres premiers

2) jusqu'à ce que l'on ait atteint la valeur de la racine carrée de ce nombre n. Dans ce cas, lors de la division euclidienne, le quotient devient plus grand que le diviseur.

Exercice modèle: Est-ce que le nombre n = 457 est nombre premier ?

- On voit que 457 n'est ni divisible par 2, ni par 5.
- La somme des chiffres étant s = 7, le nombre n n'est pas divisible par 3.
- Divisions euclidiennes:

$457 = 7 \cdot 65 + 2$ Donc 457 n'est pas divisible par b = 7
$457 = 11 \cdot 41 + 6$ Donc 457 n'est pas divisible par b = 11
$457 = 13 \cdot 35 + 2$ Donc 457 n'est pas divisible par b = 13
$457 = 17 \cdot 26 + 15$ Donc 457 n'est pas divisible par b = 17
$457 = 19 \cdot 24 + 1$ Donc 457 n'est pas divisible par b = 19
$457 = 23 \cdot 19 + 20$ Donc 457 n'est pas divisible par b = 23

- Comme q (=19) < b (=23) , on peut s'arrêter et conclure que **457 est un nombre premier**.

Remarque: La racine carrée de 457 est comprise entre 19 et 23: $19 < \sqrt{457} < 23$

B Division euclidienne

Exemple du « bon vieux temps »

Dans la classe 6M6 on veut acheter une éponge à 70 Luf. Comme il y 22 élèves dans la classe, quel est le montant qu'un chacun doit payer ?

70 : 22 = 3 Chacun doit payer au moins 3 Luf. Le reste est égal à: r = 70-22 · 3 = 4 Luf
66
 4 Donc: 70 = 22 · 3 + 4

Le nombre 70 est appelé dividende (nombre qui est à diviser) et noté a. a = 70
Le nombre 22 est appelé le diviseur et noté b. b = 22
Le nombre 3 est appelé le quotient et noté q. q = 3
Le nombre 4 est appelé le reste de la division et noté r. r = 4

En général: $\boxed{a = b \cdot q + r \quad \text{avec} \quad 0 \le r < b}$ Une telle division s'appelle **division euclidienne**.

- Quel aurait pu être le prix maximal de l'éponge sans que le quotient ne change ? $b \cdot (q+1) - 1$
- Quel aurait pu être le prix minimal de l'éponge sans que le quotient ne change ? $a - r$

Exercice à domicile:
Un marchand doit livrer 400 sacs de charbon avec une camionnette pouvant transporter 30 sacs à la fois.

- Combien de voyages doit-il faire ?
- Combien de sacs supplémentaires aurait-il pu livrer sans faire de voyage en plus ?

Exercices:

1) Effectuer la division euclidienne de 145 par 23.

   - Que devient le reste si l'on ajoute 2 au dividende ?
   - Quel nombre peut-on ajouter au plus au dividende sans changer le quotient ?
   - Quel nombre peut-on retrancher au plus du dividende sans changer le quotient ?

2) Effectuer la division euclidienne de 364 par 29.

   - Que devient le reste si l'on ajoute 2 au dividende ?
   - Quel nombre peut-on ajouter au plus au dividende sans changer le quotient ?
   - Quel nombre peut-on retrancher au plus du dividende sans changer le quotient ?

3) Effectuer la division euclidienne de 1425 par 39.

   - Quel nombre peut-on ajouter au plus au dividende sans changer le quotient ?
   - Quel nombre doit-on retrancher au moins du dividende pour que le quotient diminue d'une unité ?
   - Quel nombre doit-on retrancher au moins du dividende pour que le quotient diminue de deux unités ?
   - Quel nombre doit-on ajouter au moins au dividende pour que le quotient augmente de deux unités ?
   - Quel nombre peut-on ajouter au plus au dividende pour que le quotient augmente de deux unités ?

4) Effectuer la division euclidienne de 12435 par 47.

   - Quel nombre peut-on ajouter au plus au dividende sans changer le quotient ?
   - Quel nombre doit-on retrancher au moins du dividende pour que le quotient diminue d'une unité ?
   - Quel nombre doit-on retrancher au moins du dividende pour que le quotient diminue de deux unités ?
   - Quel nombre doit-on ajouter au moins au dividende pour que le quotient augmente de deux unités ?
   - Quel nombre peut-on ajouter au plus au dividende pour que le quotient augmente de deux unités ?

5) Dans une division euclidienne, le dividende est 920 et le quotient est 17.
   Trouver le diviseur (plusieurs solutions)

6) Trouver tous les nombres compris entre 2200 et 2500 dont le quotient de la division par 28 est le triple du reste.

7) Le quotient d'une division est 22, le reste 9.
   Trouver le dividende et le diviseur sachant que si l'on ajoute 35 au dividende, le quotient devient 25 et le reste 2.

8) Le quotient d'une division euclidienne est 9 et le reste 12. Si l'on ajoute 29 au dividende, le quotient est 12 et le reste 2.
Trouver le dividende et le diviseur.

9) Quels sont les nombres dont le reste de la division par 6 est le double du quotient ?

10) Quels sont les nombres dont le reste de la division par 8 est le triple du quotient ?

11) Quels sont les nombres dont le reste de la division par 13 est le quadruple du quotient ?

12) Quels sont les nombres dont le quotient de la division par 4 est le triple du reste ?

13) Quels sont les nombres dont le quotient de la division par 6 est le double du reste ?

14) Quels sont les nombres dont le quotient de la division par 7 est le quadruple du reste ?

15) **La date de Pâques**

La date de Pâques est un mixage de calendrier solaire et de calendrier lunaire. Le mathématicien allemand Gauss a donné une formule pour le calcul de cette date jusqu'en l'an 2100. Cette formule est basée sur la division euclidienne. Voici donc la formule:

Soit A l'année. a est le reste de la division de A par 19.
b est le reste de la division de A par 4
c est le reste de la division de A par 7
d est le reste de la division de $19a + 24$ par 30
e est le reste de la division de $2b + 4c + 6d + 5$ par 7.
Si $d + e \leq 9$, alors Pâques est le $(22 + d + e)^{\text{ième}}$ jour de mars.
Si $d + e > 9$, alors Pâques est le $(d + e - 9)^{\text{ième}}$ jour d'avril.

Exercice: Calculer la date de Pâques pour les années 2000 et 2018.

C Nombres premiers

Exercice 1: Les nombres suivants sont-ils premiers ?
557 857 619 719 1271 1671

Exercice 2: Calculez $2^p - 1$, si p est un des 7 premiers nombres premiers. Quels sont les résultats qui nous fournissent de nouveau un nombre premier?

Exercice 3: Ecrivez les nombres premiers
11 13 17 19 23 29 31 37
comme différence de 2 carrés de nombres naturels, comme montrés sur les exemples:
Exemples: $3 = 2^2 - 1^2$ $5 = 3^2 - 2^2$ $7 = 4^2 - 3^2$

Exercice 4: Ecrivez les nombres premiers 17 29 37 41 53 61 73 comme somme de 2 carrés de nombres naturels, comme montrés sur les exemples:
Exemples: $5 = 2^2 + 1^2$ $13 = 3^2 + 2^2$

Exercice 5: a) Vérifiez que les nombres suivants sont premiers:

$2\cdot3-1$ $\quad$ $2\cdot3+1$

$2\cdot3\cdot5-1$ $\quad$ $2\cdot3\cdot5+1$

$2\cdot3\cdot5\cdot7+1$ $\quad$ $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11+1$

b) .. mais que les nombres suivants ne sont pas premiers:

$2\cdot3\cdot5\cdot7-1$ $\quad$ $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11-1$ $\quad$ $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13+1$

Exercice 6: Pour les programmeurs ou autres experts de l'informatique

Voici un programme "*Basic*" qui sert à déterminer si un nombre est premier. Effectuez les différentes étapes de ce programme pour les nombres suivants: 37 209

```
Input  "Nombre à tester: A = ";A
N = 2
If  int(A/N) = A/N  then print "Le nombre A n'est pas un nombre premier"
If  N = A  then print  "Le nombre A est un nombre premier !"
N = N+1
```

D Calcul de PGCD et PPCM

Exercice 1: Déterminer les pgcd et ppcm des couples de nombres suivants:

(528,204)	(54,36)	(45,90)	(180,378)
(25,16)	(32,84)	(45,75)	(384,132)

Exercice 2: Déterminer les pgcd et ppcm des triplets de nombres suivants:

(384, 126, 132)	(144, 468, 688)	(1260, 3024, 5544)
(37, 185, 333)	(847, 1089, 1210)	(2700, 4050, 6750)

Exercice 3: Déterminez le pgcd(a,b) et utilisez les deux nombres a et b ainsi que leur pgcd pour conclure à leur ppcm.

i)	$a=36$	$b=84$	*ii)*	$a=45$	$b=48$
iii)	$a=588$	$b=1372$	*iv)*	$a=420$	$b=540$

E Nombres premiers entre eux

Exercice: Contrôlez pour chaque couple de nombres, s'ils sont premiers entre eux.

$(51;78)$ $(34;49)$ $(84;135)$ $(120;77)$

$(32;243)$ $(68;153)$ $(84;385)$ $(1024;625)$

F Exercices sur les problèmes concrets - PGCD - PPCM

1) Une classe de 6^e peut être rangée 3 par 3 et 8 par 8 et les rangs sont tous complets. Combien d'élèves cette classe compte-t-elle au moins ?

2) Dans un pays, il y a les élections pour la Chambre des Députés tous les 5 ans, pour le Conseil Communal tous les 6 ans. Les 2 élections ont eu lieu en 1979. Après combien d'années les 2 élections auront-elles lieu de nouveau la même année ?

3) Avec des dalles rectangulaires ayant les dimensions 42 cm et 12 cm on veut daller un carré aussi petit que possible. Quelle sera la longueur du côté de ce carré ? Combien de dalles faut-il utiliser ?

4) A l'aide de rectangles de dimensions respectives 60 mm et 24 mm, on veut recouvrir un carré aussi petit que possible. Combien de rectangles faut-il utiliser ? Quelle est l'aire de ce carré ?

5) En rangeant les enfants d'un groupe 4 par 4 , 6 par 6 ou 10 par 10, il en reste toujours 1. Combien d'enfants y a-t-il au moins dans ce groupe ? Combien de rangées complètes obtient-on dans les 3 cas ?

6) Le nombre d'un groupe d'enfants est inférieur à 150. Si on groupe les enfants 4 par 4 , 6 par 6 ou 9 par 9, il en reste toujours 1. Si on les groupe 5 par 5, il n'en reste aucun. Quel est le nombre des enfants ?

7) Un épicier compte les pommes d'une caisse 2 par 2, il en reste une; il les compte 3 par 3, il en reste 2; il les compte 5 par 5, il en reste 4. Combien de pommes y a-t-il dans la caisse sachant que ce nombre est inférieur à 50 ?

8) On veut rassembler les élèves des classes de 6e du LGL dans la cour. Si on les groupe par 10, il en reste 7; si on les groupe par 12, il en reste 9; si on les groupe par 15, il en reste 12. Déterminer le nombre des élèves sachant que ce nombre est compris entre 170 et 210 !

9) Un avion transporte transporte moins de 450 passagers. Si on groupe les passagers 3 à 3, il en reste 1; si on les groupe 4 à 4, il en reste 2; si on les groupe 7 à 7, il en reste 5, mais si on les groupe 5 à 5, il n'en reste aucun. Quel est le nombre de passagers que l'avion transporte ?

10) Sur une route rectiligne, il reste 4 arbres que l'on rencontre dans l'ordre A, B, C, D et dont les distances respectives sont AB = 120 m, BC = 264 m et CD = 280 m. On veut planter d'autres arbres dans les intervalles de façon à ce que tous les arbres soient régulièrement espacés.
Combien d'arbres faut-il planter, si l'on veut que la distance entre deux arbres consécutifs soit un nombre entier de mètres supérieur à 5 et qu'il y ait un maximum d'arbres ?

11) Une compagnie d'électricité doit poser des réverbères le long d'une route qui entoure complètement une nouvelle zone industrielle en forme de quadrilatère dont les côtés mesurent respectivement 1260, 8316, 6552 et 5292 m.
Calculer le nombre de réverbères nécessaires sachant qu'on veut les poser à intervalles réguliers d'environ 50 m et que l'on doit poster un réverbère à chaque angle.

12) On a trois règles d'une longueur de 24 cm. On les partage respectivement en 20, 30 et 40 parties égales. Ensuite, on superpose les 3 règles.
- Quelle est la distance entre deux traits de division consécutifs qui coïncident sur les trois règles ?
- Combien de fois les traits de division coïncident-ils sur les trois règles ?
- Quelle est la distance entre les traits de division qui coïncident pour la 4e et la 7e fois sur les trois règles ?

13) Dans une caisse de dimensions $L = 105cm, l = 60cm$ et $h = 45cm$, on veut placer des paquets en forme de cubes. Le côté d'un cube doit être le plus grand nombre possible. Calculez le côté du cube ainsi que le nombre de cubes qu'on place dans cette boîte.

14) Le plancher d'une salle rectangulaire de dimensions $L = 5,40m$ et $l = 3,96m$ sera recouvert de dalles carrées. Le côté d'une dalle est un nombre entier de cm compris entre 15 et 20. Calculez le nombre de dalles utilisées.

15) Sur un autodrome, 3 voitures partent au même instant sur la ligne de départ. La première voiture met 48 secondes (s) pour un tour complet, la deuxième met 50 s et la troisième voiture met 54 s.
- Après combien de temps les trois voitures passent-elles de nouveau ensemble pour léa première fois la ligne de départ ?
- Quel sera le nombre de tours parcourus par chaque voiture ?